

Reihe Informatik

1/95

**Bisimulationen und Äquivalenzbegriffe
für Transitionssysteme und Ereignisstrukturen**

Diplomarbeit

Martin Christgau

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	3
§0 Allgemeine Definitionen	5
Teil I. Transitionssysteme	
§1 Definitionen, Isomorphie	6
§2 Bisimulationen und Beobachtungskongruenz	9
§3 Trace- und Divergenz-Äquivalenzen	15
§4 Failure-Äquivalenzen	23
§5 Test-Äquivalenzen	34
§6 Simulationen	37
§7 Bäume	41
§8 Zusammenfassung	44
Teil II. Ereignisstrukturen	
§9 Definitionen, Isomorphie	48
§10 Bisimulationen	56
§11 Trace-Äquivalenzen	67
§12 ST-Bisimulationen	73
§13 Failure-Äquivalenzen	86
§14 Eigenkonkurrenz	94
§15 Transitionssysteme, Bäume, Pomsets	103
§16 Zusammenfassung	105
Anhang	
Literaturverzeichnis	108
Index	111
Erklärung	112

Einleitung

In den vergangenen Jahren wurden parallele Prozesse auf konkurrenten Systemen umfangreich erforscht. Wichtige Modelle sind Transitionssysteme und Ereignisstrukturen, die beide das Verhalten von Systemen beschreiben, speziell also die Ausführung von beobachtbaren (sichtbaren) Aktionen. Darüber hinaus wird weiter die Möglichkeit interner (unsichtbarer) Aktionen der Systeme berücksichtigt, die außerhalb des Systems nicht beobachtbar sind, die aber das Verhalten des Systems beeinflussen können. Es ist eine wesentliche Fragestellung, wann zwei solche Systeme als „gleich“ zu betrachten sind, wie man also konkret Äquivalenzrelationen für Transitionssysteme bzw. Ereignisstrukturen definiert.

Unterschiedliche Bedürfnisse und Zielsetzungen haben dabei zu höchst unterschiedlichen Ansätzen geführt, und die Zweckmäßigkeit jeder konkreten Äquivalenzrelation hängt fast immer vom jeweiligen Einzelfall ab.

Ein einfacher Ansatz ist die Betrachtung „verzahnter“ Aktionen, also die Vorstellung, daß einzelne Aktionen grundsätzlich nacheinander ausgeführt werden. Systeme dieser Art lassen sich speziell durch Transitionssysteme einfach darstellen.

Die möglichen Zustände des Systems werden dabei alle explizit angegeben, ebenso die Übergänge (Transitionen) zwischen den Zuständen durch die Ausführung jeweils genau einer Aktion.

Unberücksichtigt bleibt dabei die Möglichkeit einer tatsächlichen parallelen Ausführung von Aktionen. Zwei parallele Aktionen können zwar in beliebiger Reihenfolge ausgeführt werden, aber nicht gleichzeitig.

Ereignisstrukturen sind eine abstraktere Möglichkeit zur Darstellung solcher Systeme, erlauben dafür aber neben der „verzahnten“ Parallelität auch die Möglichkeit „echter“ (oder „verteilter“) Parallelität. Die möglichen Zustände des Systems werden nicht explizit angegeben, sondern die Ausführung einer Aktion wird als das Eintreten eines Ereignisses beschrieben. Die Reihenfolge des möglichen Eintretens wird durch zwei Relationen eingeschränkt: Eine Konfliktrelation bestimmt Ereignisse, die sich gegenseitig ausschließen, und eine Ursachenrelation legt fest, welche Ereignisse Voraussetzung für andere Ereignisse sind (also vor ihnen eintreten müssen).

Ereignisse, die weder miteinander in Konflikt stehen noch gegenseitig notwendige Voraussetzung füreinander sind, können dann auch parallel eintreten.

In dieser Arbeit werden in zwei Teilen die wichtigsten Äquivalenzrelationen für Transitionssysteme und Ereignisstrukturen aus der Literatur zusammengestellt, in eine einheitliche Notation gebracht und wechselseitig miteinander verglichen. Weiterhin werden einige zusätzliche Varianten definiert.

Im ersten Teil werden Äquivalenzrelationen auf Transitionssystemen behandelt. In der Literatur wird dabei unterschieden zwischen „starken“ Varianten (bei denen interne Aktionen explizit wie sichtbare Aktionen behandelt werden) und „schwachen“ Varianten (die ganz oder teilweise von internen Aktionen abstrahieren). Einige schwache Varianten berücksichtigen dabei speziell Divergenz (die Möglichkeit des Systems, unendlich viele interne Aktionen auszuführen) auf unterschiedliche Weise.

Behandelt werden zunächst die Bisimulationen und Beobachtungskongruenz von [Milner a], dann Trace- und Divergenz-Äquivalenzen (vgl. [Hoare]), Failure-Äquivalenzen (vgl. [Hoare] bzw. [Milner]), Test-Äquivalenzen (vgl. [DN/He a]) sowie die in [Milner] definierte Simulation.

Eine Teilauswahl und Vergleiche verschiedener dieser Äquivalenzrelationen findet man bereits in [Taubner] und [Milner].

Abschließend werden die Äquivalenzrelationen auf Bäumen betrachtet.

Im zweiten Teil werden Äquivalenzrelationen auf Ereignisstrukturen behandelt.

Hier werden in der Literatur üblicherweise alle Äquivalenzrelationen in „schwachen“ Varianten definiert und dafür Ereignisstrukturen ohne interne Aktionen als Spezialfall betrachtet. Zusätzlich werden prime Ereignisstrukturen als weiterer Spezialfall behandelt.

Die schon bei Transitionssystemen behandelten Varianten wie Bisimulation, Failure- und Trace-Äquivalenzen erscheinen hier in unterschiedlichen Varianten. Neben der an Transitionssysteme angelehnten „verzahnten“ Variante sind das die Betrachtung von Steps (vgl. [Pomello]), eine „partial word“ Variante (vgl. [Vogler]), die Betrachtung von Pomsets (vgl. [Bo/Ca], [Gla/Va], [Grabowski], [Pratt]) sowie „history preserving“-Äquivalenzen (vgl. [De/DN/Mo a], [Gla/Wei] und [Tr/Ra/Hi]).

Ein weiterer Aspekt ist die Betrachtung von sogenannten ST-Bisimulationen (vgl. [Glabbeek], [Vogler]), bei denen die Aktionen nicht als rein „atomar“ betrachtet werden, sondern sogenannte „aktive“ Ereignisse möglich sind, die zu einem bestimmten Zeitpunkt begonnen haben, aber noch nicht beendet sind.

Eine Auswahl und Vergleiche einiger Äquivalenzrelationen auf Ereignisstrukturen ohne interne Aktionen findet man in [Gla/Go], während in [Vogler] eine Auswahl von Äquivalenzrelationen auf primen Ereignisstrukturen mit internen Aktionen vorgestellt wird.

Alle diese Äquivalenzrelationen werden hier auf Ereignisstrukturen mit internen Aktionen behandelt, abschließend einige davon auch auf Transitionssystemen (bzw. Bäumen) und Pomsets.

§0 Allgemeine Definitionen

BEZEICHNUNG 0.1

Es sei:

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$, Menge der *natürlichen Zahlen*

$\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$

$\mathbb{I}_n := \{i \in \mathbb{N} \mid i \leq n\}$ für $n \in \mathbb{N}_0$

BEZEICHNUNG 0.2

Es sei M eine beliebige Menge,

dann ist: $\mathcal{P}(M) := \{M' \mid M' \subseteq M\}$ die *Potenzmenge*.

BEZEICHNUNG 0.3

Es sei M eine beliebige Menge, dann definiert man die Menge:

$M^* := \{\varepsilon\} \cup \{(m_1, m_2, \dots, m_n) \in M^n \mid n \in \mathbb{N}, m_i \in M \forall i \in \mathbb{I}_n\}$.

Für $m = (m_1, m_2, \dots, m_n) \in M^*$ schreibt man einfacher $m = m_1 m_2 \dots m_n$

und setzt zur weiteren technischen Vereinfachung für $n = 0$ stets $m_1 m_2 \dots m_n := \varepsilon$.

Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $m \in M$ setzt man $m^n := m_1 m_2 \dots m_n$ mit $m_i = m \forall i \in \mathbb{I}_n$.

BEZEICHNUNG 0.4

Es sei $f: A \rightarrow B$ eine Funktion, dann wird f stets als Relation $f \subseteq A \times B$ aufgefaßt, also formal nicht zwischen einer Funktion und dem Graph der Funktion unterschieden.

Man definiert die Menge:

$A \rightarrow B := \{f \subseteq A \times B \mid f: A \rightarrow B \text{ ist Funktion}\}$

BEZEICHNUNG 0.5

Es werden die folgenden Elemente und Mengen definiert:

$Act :=$ Menge von *Aktionen*, enthält eine spezielle Aktion $\tau \in Act$.

τ heißt *interne (unsichtbare) Aktion*, alle anderen Elemente von Act heißen *sichtbar*, und man definiert weiter:

$Vis := Act \setminus \{\tau\}$, Menge der *sichtbaren (beobachtbaren) Aktionen*.

Teil I. Transitionssysteme

§1 Definitionen, Isomorphie

DEFINITION 1.1

[Taubner]

Ein *Transitionssystem* ist ein Tripel $T = (S, D, z)$, wobei S eine Menge von *Zuständen*¹, $D \subseteq S \times \text{Act} \times S$ eine Relation (die *Übergangsrelation*) und $z \in S$ ein *Startzustand* ist. Die Menge aller Transitionssysteme heißt \mathbb{T} .

BEMERKUNG 1.2

Ein Transitionssystem $T = (S, D, z)$ wird als System interpretiert, das Aktionen aus Act ausführen kann und mit jeder ausgeführten Aktion von einem Zustand zu einem (nicht notwendigerweise) anderen Zustand übergeht. Ein Tripel $(s, \alpha, s') \in D$ wird so interpretiert, daß das System vom Zustand s ausgehend durch Ausführung der Aktion α in den Zustand s' übergeht.

BEMERKUNG 1.3

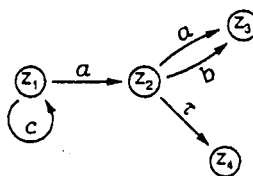
Falls an Stelle der Menge Act eine andere Menge M betrachtet werden soll, heißt $T = (S, D, z)$ *Transitionssystem über M* , und man definiert die Relation $D \subseteq S \times M \times S$ entsprechend.

BEISPIEL 1.4

Soweit Verwechslungen ausgeschlossen sind, wird im folgenden ein Transitionssystem nicht als Tripel angegeben, sondern graphisch als gerichteter Graph mit markierten Kanten (unterschiedlich markierte mehrfache Kanten und markierte Schleifen sind zulässig, aber keine parallelen Kanten derselben Markierung).

Der Startzustand ist dabei immer $z_1 \in S$.

$T = (\{z_1, z_2, z_3, z_4\}, \{(z_1, a, z_2), (z_1, c, z_1), (z_2, b, z_3), (z_2, a, z_3), (z_2, \tau, z_4)\}, z_1)$ wird also zum Beispiel folgenderweise angegeben:



DEFINITION 1.5

[Taubner]

Für $T \in \mathbb{T}$, $s, s' \in S$ und $\alpha \in \text{Act}$ gelten folgende Schreibweisen:

$$s \xrightarrow{\alpha}_D s' \Leftrightarrow (s, \alpha, s') \in D$$

Soweit Verwechslungen ausgeschlossen sind, wird der Index D ausgelassen, also nur $s \xrightarrow{\alpha} s'$ geschrieben.

Bei indizierten Transitionssystemen T_i , $i \in \mathbb{N}$ wird statt $s \xrightarrow{\alpha}_D s'$ vereinfacht $s \xrightarrow{\alpha}_i s'$ geschrieben.

¹ Es wird unterstellt, daß S immer Teilmenge einer beliebigen, aber festen Grundmenge ist, so daß die Menge der Transitionssysteme wohldefiniert ist

Weiterhin gelten die Schreibweisen:

$$\begin{aligned} s &\xrightarrow{\alpha} && \Leftrightarrow \exists s' \in S: s \xrightarrow{\alpha} s' \\ s &\not\xrightarrow{\alpha} s' && \Leftrightarrow \neg(s \xrightarrow{\alpha} s') \\ s &\not\xrightarrow{\alpha} && \Leftrightarrow \neg(s \xrightarrow{\alpha}) \end{aligned}$$

DEFINITION 1.6

[Taubner]

Es sei $T = (S, D, z)$ ein Transitionssystem, $s, s' \in S$ und $\omega \in \text{Act}^*$.

Man definiert mit $\omega = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$:

$$s \xrightarrow{\omega} s' \Leftrightarrow \exists s_0, s_1, \dots, s_n \in S \text{ mit } s = s_0, s' = s_n \text{ und } s_{i-1} \xrightarrow{\alpha_i} s_i \quad \forall i \in \mathbb{I}_n$$

Speziell gilt für alle $s \in S$: $s \xrightarrow{\varepsilon} s$.

ω heißt *Pfad* von s nach s' .

Weiterhin gelten die Schreibweisen:

$$\begin{aligned} s &\xrightarrow{\omega} && \Leftrightarrow \exists s' \in S: s \xrightarrow{\omega} s' \\ s &\not\xrightarrow{\omega} s' && \Leftrightarrow \neg(s \xrightarrow{\omega} s') \\ s &\not\xrightarrow{\omega} && \Leftrightarrow \neg(s \xrightarrow{\omega}) \end{aligned}$$

DEFINITION 1.7

[Taubner]

Ein Transitionssystem $T = (S, D, z)$ heißt *endlich*, wenn die Mengen S und D beide endlich sind.

DEFINITION 1.8

[Taubner]

Es sei $T = (S, D, z)$ ein Transitionssystem. Ein Zustand $s \in S$ heißt *endlich verzweigend*, wenn die Menge $\{(s, \alpha, s') \in D \mid \alpha \in \text{Act}, s' \in S\}$ endlich ist.

DEFINITION 1.9

[Milner]

Es sei $T = (S, D, z)$ ein Transitionssystem.

Ein Zustand $s \in S$ heißt *stabil*, wenn $s \not\xrightarrow{\tau}$ gilt.

Ein Zustand eines Transitionssystems divergiert, wenn das System, beginnend mit dem Zustand, unendlich viele unsichtbare Aktionen τ ausführen kann. Erreicht ein System einen divergenten Zustand, besteht damit die Möglichkeit, daß es danach keine sichtbaren Aktionen mehr ausführt.

DEFINITION 1.10

[Taubner]

Es sei $T = (S, D, z)$ ein Transitionssystem.

Ein Zustand $s \in S$ *divergiert* genau dann, wenn eine Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ in S existiert mit der Eigenschaft: $s_0 = s$ und $s_{i-1} \xrightarrow{\tau} s_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$.

Es gelten folgende Schreibweisen:

$$\begin{aligned} s \uparrow &&& \Leftrightarrow s \text{ divergiert} \\ s \nmid &&& \Leftrightarrow \neg(s \uparrow) \end{aligned}$$

Das Transitionssystem T *divergiert* genau dann, wenn ein $s \in S$ und $\omega \in \text{Act}^*$ mit $z \xrightarrow{\omega} s$, $s \uparrow$ existiert, sonst heißt T *divergenzfrei*.

Es gelten folgende Schreibweisen:

$$\begin{aligned} T \uparrow &&& \Leftrightarrow T \text{ divergiert} \\ T \nmid &&& \Leftrightarrow T \text{ divergenzfrei} \end{aligned}$$

Neben den oben definierten Pfaden betrachtet man auch „sichtbare“ Pfade, die keine unsichtbaren Aktionen enthalten. Bei einer Transition wird also nur die Folge der sichtbaren Aktionen angegeben, zwischen denen das System beliebig viele unsichtbare Aktionen ausführen kann.

DEFINITION 1.11

[Milner]

Für $T \in \mathbb{T}$, $s, s' \in S$ und $\alpha \in \text{Act}$ wird definiert:

$$s \xrightarrow{\alpha} s' \Leftrightarrow \exists k, l \in \mathbb{N}_0: s \xrightarrow{\tau^k \alpha \tau^l} s'$$

$$s \xrightarrow{\alpha} \Leftrightarrow \exists s' \in S: s \xrightarrow{\alpha} s'$$

$$s \not\xrightarrow{\alpha} s' \Leftrightarrow \neg(s \xrightarrow{\alpha} s')$$

$$s \not\xrightarrow{\alpha} \Leftrightarrow \neg(s \xrightarrow{\alpha})$$

DEFINITION 1.12

[Taubner]

Für $\omega \in \text{Act}^*$ wird definiert:

$$\omega \setminus \tau := \begin{cases} \varepsilon & \text{falls } \omega = \varepsilon \\ v \setminus \tau & \text{falls } \omega = v\tau \\ (v \setminus \tau)\alpha & \text{falls } \omega = v\alpha, \alpha \in \text{Vis} \end{cases}$$

Anschaulich gesprochen, werden einfach alle Vorkommen von τ aus ω entfernt.

DEFINITION 1.13

[Milner]

Es sei $T = (S, D, z)$ ein Transitionssystem, $s, s' \in S$ und $\omega \in \text{Act}^*$.

Man definiert mit $\omega = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$:

$$s \xRightarrow{\omega} s' \Leftrightarrow \exists s_0, s_1, \dots, s_n \in S \text{ mit } s = s_0, s' = s_n \text{ und } s_{i-1} \xrightarrow{\alpha_i} s_i \quad \forall i \in \mathbb{I}_n$$

Speziell gilt für alle $s \in S$: $s \xRightarrow{\varepsilon} s$.

Weiterhin gelten die Schreibweisen:

$$s \xRightarrow{\omega} \Leftrightarrow \exists s' \in S: s \xRightarrow{\omega} s'$$

$$s \not\xRightarrow{\omega} s' \Leftrightarrow \neg(s \xRightarrow{\omega} s')$$

$$s \not\xRightarrow{\omega} \Leftrightarrow \neg(s \xRightarrow{\omega})$$

DEFINITION 1.14

[Taubner]

Zwei Transitionssysteme $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ heißen *isomorph* (geschrieben $T_1 \cong T_2$), wenn eine bijektive Abbildung $f: S_1 \rightarrow S_2$ mit der Eigenschaft $f(z_1) = z_2$ existiert und $(s, \alpha, s') \in D_1 \Leftrightarrow (f(s), \alpha, f(s')) \in D_2 \quad \forall s, s' \in S, \alpha \in \text{Act}$ gilt.

§2 Bisimulationen und Beobachtungskongruenz

Eine wichtige Gruppe von Äquivalenzrelationen auf Transitionssystemen sind die sogenannten Bisimulationen. Anschaulich ist eine Bisimulation für zwei Transitionssysteme eine paarweise Zuordnung von Zuständen der beiden Systeme, die man als „gleich“ identifiziert. Gemeint ist, daß es für jede Transition von einem der beiden Zustände aus eine gleiche Transition von dem anderen Zustand aus gibt und die beiden erreichten neuen Zustände wieder miteinander identifiziert werden.

DEFINITION 2.1

vgl. [Milner]

Es seien $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ Transitionssysteme.

Eine Relation $B \subseteq S_1 \times S_2$ mit $(s_1, s_2) \in B$ heißt *starke Bisimulation* für (s_1, s_2) , wenn für alle $(r_1, r_2) \in B$ und $\alpha \in \text{Act}$ gilt:

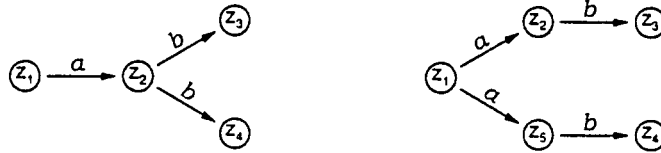
- i) $r_1 \xrightarrow{\alpha}_1 r'_1 \in S_1 \Rightarrow \exists r'_2 \in S_2$ mit $r_2 \xrightarrow{\alpha}_2 r'_2$ und $(r'_1, r'_2) \in B$
- ii) $r_2 \xrightarrow{\alpha}_2 r'_2 \in S_2 \Rightarrow \exists r'_1 \in S_1$ mit $r_1 \xrightarrow{\alpha}_1 r'_1$ und $(r'_1, r'_2) \in B$

Man definiert $T_1 \sim T_2 \Leftrightarrow \exists B$ starke Bisimulation für (z_1, z_2) ,

B heißt dann starke Bisimulation für $T_1 \sim T_2$, und man schreibt dafür auch $T_1 \stackrel{a}{\sim} T_2$.

BEISPIEL 2.2

Die folgenden Transitionssysteme $T_1, T_2 \in \mathbb{T}$ sind offensichtlich nicht isomorph, aber stark bisimilar:



Beweis:

$B := \{(z_1, z_1), (z_2, z_2), (z_2, z_5), (z_3, z_3), (z_4, z_4)\}$ ist eine starke Bisimulation.

LEMMA 2.3

vgl. [Milner]

Es seien $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ Transitionssysteme.

Eine Relation $B \subseteq S_1 \times S_2$ mit $(s_1, s_2) \in B$ ist genau dann starke Bisimulation für (s_1, s_2) , wenn für alle $(r_1, r_2) \in B$ und $v \in \text{Act}^*$ gilt:

- i) $r_1 \xrightarrow{v}_1 r'_1 \in S_1 \Rightarrow \exists r'_2 \in S_2$ mit $r_2 \xrightarrow{v}_2 r'_2$ und $(r'_1, r'_2) \in B$
- ii) $r_2 \xrightarrow{v}_2 r'_2 \in S_2 \Rightarrow \exists r'_1 \in S_1$ mit $r_1 \xrightarrow{v}_1 r'_1$ und $(r'_1, r'_2) \in B$

Beweis:

„ \Rightarrow “ klar

„ \Leftarrow “ Vollständige Induktion nach $n = |v| \in \mathbb{N}_0$, $v = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$. //

LEMMA 2.4

[Milner]

Es seien $T_1, T_2, T_3 \in \mathbb{T}$, $B_{1,2} \subseteq S_1 \times S_2$ eine starke Bisimulation für $T_1 \sim T_2$

und $B_{2,3} \subseteq S_2 \times S_3$ eine starke Bisimulation für $T_2 \sim T_3$.

Weiter sei $(B_i)_{i \in M}$ eine beliebige Familie starker Bisimulationen für $T_1 \sim T_2$.

Dann ist

- i) $S_1^{id} := \{(s, s) \mid s \in S_1\}$ starke Bisimulation für $T_1 \sim T_1$
- ii) $B_{1,2}^{-1} := \{(s', s) \mid (s, s') \in B_{1,2}\}$ starke Bisimulation für $T_2 \sim T_1$
- iii) $B_{1,2}B_{2,3} := \{(s, s'') \mid \exists s' \in S_2: (s, s') \in B_{1,2} \text{ und } (s', s'') \in B_{2,3}\}$
starke Bisimulation für $T_1 \sim T_3$
- iv) $B := \bigcup \left\{ B_i \subseteq S_1 \times S_2 \mid T_1 \stackrel{a}{\sim} T_2, i \in M \right\}$ starke Bisimulation für $T_1 \sim T_2$

Beweis:

vgl. [Milner]

i, ii) klar

- iii) Es sei $B_{1,3} := B_{1,2}B_{2,3}$ und $(s_1, s_3) \in B_{1,3}$,
dann existiert $s_2 \in S_2: (s_1, s_2) \in B_{1,2}, (s_2, s_3) \in B_{2,3}$.
Es sei $\alpha \in \text{Act}$ und gelte o.B.d.A. $s_1 \xrightarrow{\alpha}_1 s'_1$.
Dann existiert $s'_2 \in S_2: s_2 \xrightarrow{\alpha}_2 s'_2$ und $(s'_1, s'_2) \in B_{1,2}$
und damit existiert auch $s'_3 \in S_3: s'_2 \xrightarrow{\alpha}_3 s'_3$ und $(s'_2, s'_3) \in B_{2,3}$.
Somit gilt $(s'_1, s'_3) \in B_{1,3}$. //

- iv) Es sei $(s_1, s_2) \in B$, dann existiert ein B_i mit $(s_1, s_2) \in B_i \subseteq B$.
Die Behauptung folgt aus der Bisimulationseigenschaft von B_i . //

DEFINITION 2.5

vgl. [Milner]

Es seien $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ Transitionssysteme.

Eine Relation $B \subseteq S_1 \times S_2$ mit $(s_1, s_2) \in B$ heißt *schwache Bisimulation* für (s_1, s_2) ,
wenn für alle $(r_1, r_2) \in B$ und $\omega \in \text{Vis}^*$ gilt:

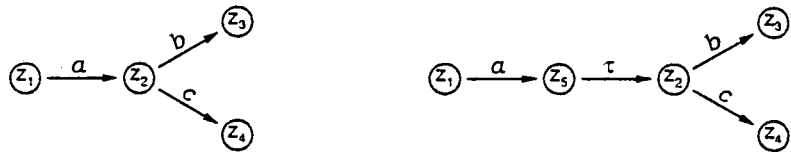
- i) $r_1 \xRightarrow{\omega}_1 r'_1 \in S_1 \Rightarrow \exists r'_2 \in S_2 \text{ mit } r_2 \xRightarrow{\omega}_2 r'_2 \text{ und } (r'_1, r'_2) \in B$
- ii) $r_2 \xRightarrow{\omega}_2 r'_2 \in S_2 \Rightarrow \exists r'_1 \in S_1 \text{ mit } r_1 \xRightarrow{\omega}_1 r'_1 \text{ und } (r'_1, r'_2) \in B$

Man definiert $T_1 \approx T_2 \Leftrightarrow \exists B$ schwache Bisimulation für (z_1, z_2) ,

B heißt dann schwache Bisimulation für $T_1 \approx T_2$, und man schreibt dafür auch $T_1 \stackrel{a}{\sim} T_2$.

BEISPIEL 2.6

Die folgenden Transitionssysteme $T_1, T_2 \in \mathbb{T}$ sind schwach bisimilar,
aber nicht stark bisimilar:



Beweis:

$B := \{(z_1, z_1), (z_2, z_3), (z_2, z_2), (z_3, z_3), (z_4, z_4)\}$ ist eine schwache Bisimulation.
Wegen $z_1 \xrightarrow{a}_2 z_2$ aber $z_1 \not\xrightarrow{a}_1$ können sie nicht stark bisimilar sein.

LEMMA 2.7

vgl. [Milner]

Es seien $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ Transitionssysteme.

Eine Relation $B \subseteq S_1 \times S_2$ mit $(s_1, s_2) \in B$ ist genau dann schwache Bisimulation für (s_1, s_2) , wenn für alle $(r_1, r_2) \in B$ und $\alpha \in \text{Act}$ gilt:

- i) $r_1 \xrightarrow{\alpha}_1 r'_1 \in S_1 \Rightarrow \exists r'_2 \in S_2$ mit $r_2 \xrightarrow{\alpha \setminus \tau}_2 r'_2$ und $(r'_1, r'_2) \in B$
- ii) $r_2 \xrightarrow{\alpha}_2 r'_2 \in S_2 \Rightarrow \exists r'_1 \in S_1$ mit $r_1 \xrightarrow{\alpha \setminus \tau}_1 r'_1$ und $(r'_1, r'_2) \in B$

Beweis:

„ \Rightarrow “ B erfülle 2.5, und es gelte $(r_1, r_2) \in B$, $\alpha \in \text{Act}$, $r_1 \xrightarrow{\alpha}_1 r'_1 \in S_1$.

Für $\alpha = \tau$ gilt $r_1 \xrightarrow{\varepsilon}_1 r'_1$, $\varepsilon \in \text{Vis}^*$, und für $\alpha \in \text{Vis}$ gilt $r_1 \xrightarrow{\alpha}_1 r'_1$, $\alpha \in \text{Vis}^*$.

Also existiert ein $r'_2 \in S_2$ mit $r_2 \xrightarrow{\alpha}_2 r'_2$, $(r'_1, r'_2) \in B$,

und es gilt erst recht $r_2 \xrightarrow{\alpha \setminus \tau}_2 r'_2$.

Aus Symmetriegründen gilt auch ii). //

„ \Leftarrow “ Es gelte $(r_1, r_2) \in B$, $\omega \in \text{Vis}^*$ und $r_1 \xrightarrow{\omega}_1 r'_1$.

Zeige zunächst: $r_1 \xrightarrow{\varepsilon}_1 r'_1 \in S_1 \Rightarrow \exists r'_2 \in S_2$: $r_2 \xrightarrow{\varepsilon}_2 r'_2$, $(r'_1, r'_2) \in B$.

Wegen $r_1 \xrightarrow{\varepsilon}_1 r'_1$ folgt $\exists k \in \mathbb{N}_0$: $r_1 \xrightarrow{\tau^k}_1 r'_1$, und die Behauptung folgt dann wegen $\tau \setminus \tau = \varepsilon$ mit vollständiger Induktion nach k .

Eigentlicher Beweis:

Vollständige Induktion nach $n = |\omega| \in \mathbb{N}_0$, $\omega = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$.

$i = 0$) folgt direkt aus der Hilfsbehauptung.

$i - 1 \rightarrow i$) folgt wegen $s \xrightarrow{\alpha_i}_1 s' \Rightarrow \exists s'', s''': s \xrightarrow{\varepsilon}_1 s'' \xrightarrow{\alpha_i}_1 s''' \xrightarrow{\varepsilon}_1 s'$ ebenfalls aus der Hilfsbehauptung und der Induktionsvoraussetzung.

Aus Symmetriegründen erfüllt B die Bedingungen 2.5. //

[Milner] definiert eine spezielle Verfeinerung der schwachen Bisimulation:

DEFINITION 2.8

[Milner]

Es seien $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ Transitionssysteme.

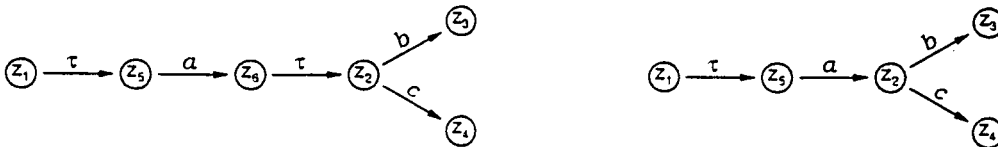
T_1 und T_2 heißen *beobachtungskongruent* (geschrieben $T_1 \approx_+ T_2$),

wenn für alle $\alpha \in \text{Act}$ gilt:

- i) $z_1 \xrightarrow{\alpha}_1 r_1 \in S_1 \Rightarrow \exists r_2 \in S_2$ mit $z_2 \xrightarrow{\alpha}_2 r_2$ und $(S_1, D_1, r_1) \approx (S_2, D_2, r_2)$
- ii) $z_2 \xrightarrow{\alpha}_2 r_2 \in S_2 \Rightarrow \exists r_1 \in S_1$ mit $z_1 \xrightarrow{\alpha}_1 r_1$ und $(S_1, D_1, r_1) \approx (S_2, D_2, r_2)$

BEISPIEL 2.9

Die folgenden Transitionssysteme $T_1, T_2 \in \mathbb{T}$ sind beobachtungskongruent, aber nicht stark bisimilar:

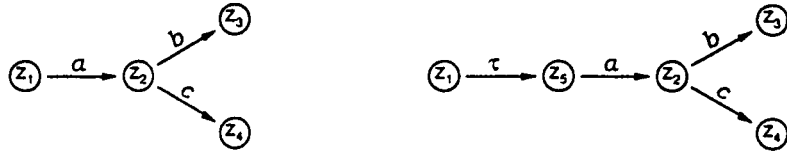


Beweis:

Für $z_1 \xrightarrow{\tau} z_5$ gilt $z_1 \xrightarrow{\tau} z_5$ und $(S_1, D_1, z_5) \approx (S_2, D_2, z_5)$,
 für $z_1 \xrightarrow{\tau} z_5$ gilt $z_1 \xrightarrow{\tau} z_5$ und $(S_1, D_1, z_5) \approx (S_2, D_2, z_5)$ jeweils nach 2.6.
 Also sind die Transitionssysteme beobachtungkongruent.
 Wegen $z_1 \xrightarrow{\tau\alpha} z_2$, aber $z_1 \not\xrightarrow{\tau\alpha} z_2$ können sie nicht stark bisimilar sein.

BEISPIEL 2.10

Die folgenden Transitionssysteme $T_1, T_2 \in \mathbb{T}$ sind schwach bisimilar,
 aber nicht beobachtungkongruent:

**Beweis:**

$B := \{(z_1, z_1), (z_1, z_5), (z_2, z_2), (z_3, z_3), (z_4, z_4)\}$ ist schwache Bisimulation.
 Wegen $z_1 \xrightarrow{\tau} z_5$, aber $z_1 \not\xrightarrow{\tau} z_1$ sind sie nicht beobachtungkongruent.

SATZ 2.11

[Taubner]

Es seien $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ Transitionssysteme mit $T_1 \equiv T_2$.
 Dann gilt $T_1 \sim T_2$.

Beweis:

[Taubner]

Es existiert ein Isomorphismus $f: S_1 \rightarrow S_2$ nach 1.14,
 und damit erfüllt $B := \{(s, f(s)) \mid s \in S_1\}$ offensichtlich 2.1. //

LEMMA 2.12

[Milner]

Es seien $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ Transitionssysteme mit $T_1 \sim T_2$.
 Dann gilt $T_1 \approx T_2$.

Beweis:

[Taubner]

Sei $B \subseteq S_1 \times S_2$ eine starke Bisimulation für $(z_1, z_2) \in B$
 und $(r_1, r_2) \in B$, $\omega \in \text{Vis}^*$ beliebig mit $r_1 \xrightarrow{\omega} r_1'$.
 Es existiert ein $v \in \text{Act}^*$ mit $\omega = v \setminus \tau$ und $r_1 \xrightarrow{v} r_1'$,
 und nach 2.3 existiert $r_2' \in S_2$ mit $r_2 \xrightarrow{v} r_2'$ und $(r_1', r_2') \in B$.
 Damit gilt auch $r_2 \xrightarrow{\omega} r_2'$, und B erfüllt Definition 2.5 i).
 Aus Symmetriegründen gilt $T_1 \approx T_2$. //

SATZ 2.13

[Milner]

Es seien $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ Transitionssysteme mit $T_1 \sim T_2$.
 Dann gilt $T_1 \approx_+ T_2$.

Beweis:

[Taubner]

Es sei $B \subseteq S_1 \times S_2$, $T_1 \stackrel{B}{\approx} T_2$, $\alpha \in \text{Act}$ beliebig und $z_1 \xrightarrow{\alpha}_1 r_1$.
 Dann existiert $r_2 \in S_2$ mit $z_2 \xrightarrow{\alpha}_2 r_2$ und $(r_1, r_2) \in B$,
 also gilt erst recht $z_2 \xrightarrow{\alpha}_2 r_2$, und mit 2.12 folgt für (r_1, r_2) :
 $(S_1, D_1, r_1) \sim (S_2, D_2, r_2) \Rightarrow (S_1, D_1, r_1) \approx (S_2, D_2, r_2)$.
 Aus Symmetriegründen gilt $T_1 \approx_+ T_2$. //

SATZ 2.14

[Milner]

Es seien $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ Transitionssysteme mit $T_1 \approx_+ T_2$.
 Dann gilt $T_1 \approx T_2$.

Beweis:

[Taubner]

Man definiert

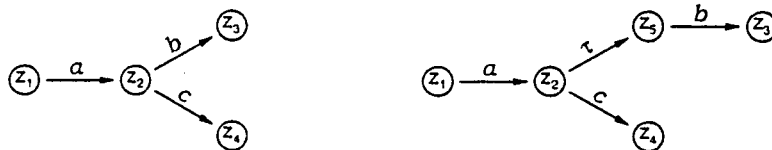
$$B := \{(z_1, z_2)\} \cup \bigcup \{B' \subseteq S_1 \times S_2 \mid \exists \alpha \in \text{Act}, s_1 \in S_1, s_2 \in S_2 \\ \text{mit } ((z_1 \xrightarrow{\alpha}_1 s_1 \text{ und } z_2 \xrightarrow{\alpha}_2 s_2) \\ \text{oder } (z_2 \xrightarrow{\alpha}_2 s_2 \text{ und } z_1 \xrightarrow{\alpha}_1 s_1)) \\ \text{und } (S_1, D_1, z_1) \stackrel{B'}{\approx} (S_2, D_2, z_2)\}$$

Zu zeigen: B ist schwache Bisimulation für $T_1 \approx T_2$.Sei also $(r_1, r_2) \in B$, $\omega \in \text{Vis}^*$ beliebig und $r_1 \xrightarrow{\omega}_1 r'_1$.Es existiert ein $v \in \text{Act}^*$ mit $\omega = v \setminus \tau$ und $r_1 \xrightarrow{v}_1 r'_1$.Fall 1) $r_1 \neq z_1$ oder $r_2 \neq z_2$

Dann gilt $(r_1, r_2) \in B'$ für eine schwache Bisimulation $B' \subseteq B$,
 der Rest folgt aus deren Eigenschaften.

Fall 2a) $(r_1, r_2) = (z_1, z_2)$, $v = \varepsilon$ Dann gilt $r'_1 = z_1$, $z_2 \xrightarrow{\varepsilon}_2 z_2 =: r'_2 \Rightarrow (r'_1, r'_2) = (z_1, z_2) \in B$.Fall 2b) $(r_1, r_2) = (z_1, z_2)$, $v = \alpha \bar{v}$, $\alpha \in \text{Act}$, $\bar{v} \in \text{Act}^*$ Dann existiert $r''_1 \in S_1$ mit $z_1 \xrightarrow{\alpha}_1 r''_1 \xrightarrow{\bar{v}}_1 r'_1$,und wegen $T_1 \approx_+ T_2$ existiert $r''_2 \in S_2$ mit $z_2 \xrightarrow{\alpha}_2 r''_2$, $(S_1, D_1, r''_1) \stackrel{B'}{\approx} (S_2, D_2, r''_2)$.Nach Definition gilt damit aber $B' \subseteq B$.Wegen $r''_1 \xrightarrow{\bar{v} \setminus \tau}_1 r'_1$ existiert $r'_2 \in S_2$ mit $r''_2 \xrightarrow{\bar{v} \setminus \tau}_2 r'_2$, $(r'_1, r'_2) \in B' \subseteq B$,und wegen $\omega = (\alpha \bar{v}) \setminus \tau = (\alpha \setminus \tau)(\bar{v} \setminus \tau)$ folgt $z_2 \xrightarrow{\omega}_2 r'_2$.Aus Symmetriegründen folgt $T_1 \approx T_2$. //

Das folgende Beispiel zeigt (im Vergleich zu 2.6, 2.9 und 2.10), daß die schwache Bisimulation nicht jede τ -Aktion an beliebiger Stelle toleriert.

BEISPIEL 2.15Die folgenden Transitionssysteme $T_1, T_2 \in \mathbb{T}$ sind nicht schwach bisimilar:

Beweis:

Angenommen, es existiert eine schwache Bisimulation $B \subseteq S_1 \times S_2$.

Wegen $z_1 \xrightarrow{a}_2 z_5$ folgt $(z_2, z_5) \in B$, da umgekehrt nur $z_1 \xrightarrow{a}_1 z_2$ in Frage kommt. Es gilt aber $z_2 \xrightarrow{c}_1 z_4$, $z_5 \not\xrightarrow{c}_2$. \nmid

BEMERKUNG 2.16

[Milner]

Es seien $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ Transitionssysteme mit $T_1 \approx T_2$, und z_1, z_2 seien beide stabil. Dann gilt $T_1 \approx_+ T_2$.

Beweis:

[Milner]

Es sei $B \subseteq S_1 \times S_2$, $T_1 \stackrel{B}{\approx} T_2$, $\alpha \in \text{Act}$ beliebig und $z_1 \xrightarrow{\alpha}_1 r_1$.

Dann existiert $r_2 \in S_2$ mit $z_2 \xrightarrow{\alpha \setminus \tau}_2 r_2$ und $(r_1, r_2) \in B$, aber wegen $z_2 \not\xrightarrow{\tau}_2$ muß in jedem Fall $\alpha \neq \tau$ und $z_2 \xrightarrow{\alpha}_2 r'_2 \in S_2$, $r'_2 \xrightarrow{\epsilon}_2 r_2$ gelten.

Damit gilt aber $z_2 \xrightarrow{\alpha}_2 r_2$ und $(S_1, D_1, r_1) \stackrel{B}{\approx} (S_2, D_2, r_2)$.

Aus Symmetriegründen folgt $T_1 \approx_+ T_2$. //

SATZ 2.17

[Milner]

Die Relationen \sim, \approx und \approx_+ sind Äquivalenzrelationen.

Beweis:

„ \sim, \approx “ Mit 2.4 folgt die Reflexivität aus i), die Symmetrie aus ii) und die Transitivität aus iii). //

„ \approx_+ “ Die Reflexivität folgt mit 2.13 aus $T_1 \sim T_1 \Rightarrow T_1 \approx_+ T_1$, und die Symmetrie folgt direkt aus der Symmetrie der Definition 2.8.

Noch zu zeigen: $T_1 \approx_+ T_2 \wedge T_2 \approx_+ T_3 \Rightarrow T_1 \approx_+ T_3$.

Sei also $\alpha \in \text{Act}$ beliebig und $z_1 \xrightarrow{\alpha}_1 r_1$.

Dann existiert ein $r_2 \in S_2$ mit $z_2 \xrightarrow{\alpha}_2 r_2$ und $(S_1, D_1, r_1) \approx (S_2, D_2, r_2)$.

Wegen $T_2 \approx_+ T_3 \Rightarrow T_2 \approx T_3$ nach 2.14 folgt direkt die Existenz eines $r_3 \in S_3$ mit $z_3 \xrightarrow{\alpha}_3 r_3$ und es gilt $(S_1, D_1, r_1) \approx (S_2, D_2, r_2) \approx (S_3, D_3, r_3)$.

Aus Symmetriegründen folgt $T_1 \approx_+ T_3$. //

§3 Trace- und Divergenz-Äquivalenzen

Während bei den Bisimulationen die interne Struktur der verglichenen Systeme eine große Rolle spielt, erhält man wesentlich schwächere Äquivalenzrelationen, wenn man nur die ausführbaren Aktionen und Aktionsfolgen vergleicht.

Die anschauliche Entsprechung ist also ein passiver Beobachter, der lediglich die ausgeführten Aktionsfolgen registriert, aber nicht die Verzweigungsmöglichkeiten des Systems berücksichtigt, die zu dem Ergebnis führen.

DEFINITION 3.1

vgl. [Hoare]

Es sei $T = (S, D, z)$ ein Transitionssystem. Man definiert die *starken Traces*:

$$\text{strong traces}(T) := \left\{ v \in \text{Act}^* \mid \exists s \in S: z \xrightarrow{v} s \right\}$$

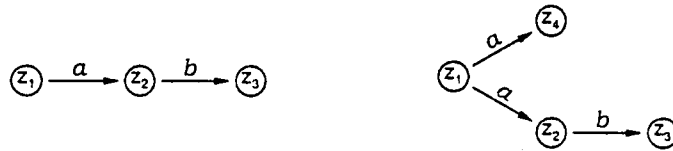
DEFINITION 3.2

vgl. [Hoare]

Zwei Transitionssysteme $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ heißen *stark trace-äquivalent* (geschrieben $T_1 \sim_{\text{tr}} T_2$), wenn gilt: $\text{strong traces}(T_1) = \text{strong traces}(T_2)$.

BEISPIEL 3.3

Die folgenden Transitionssysteme $T_1, T_2 \in \mathbb{T}$ sind stark trace-äquivalent, aber nicht schwach bisimilar:



Beweis:

Offensichtlich gilt $\text{strong traces}(T_1) = \{\varepsilon, a, ab\} = \text{strong traces}(T_2)$, also $T_1 \sim_{\text{tr}} T_2$.

Angenommen, es gilt $T_1 \stackrel{B}{\cong} T_2$. Wegen $z_1 \xrightarrow{a} z_4$ folgt $z_1 \xrightarrow{a} z_2$, $(z_2, z_4) \in B$.

Nun gilt aber $z_2 \xrightarrow{b} z_3$, $z_4 \not\xrightarrow{b}$. \nmid

LEMMA 3.4

[Milner]

Es seien $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ Transitionssysteme mit $T_1 \sim T_2$.

Dann gilt $T_1 \sim_{\text{tr}} T_2$.

Beweis:

Es sei $v \in \text{strong traces}(T_1)$, also existiert ein $r_1 \in S_1$ mit $z_1 \xrightarrow{v} r_1$.

Da eine starke Bisimulation $B \subseteq S_1 \times S_2$, $T_1 \stackrel{B}{\cong} T_2$ existiert,

gibt es ein $r_2 \in S_2$ mit $z_2 \xrightarrow{v} r_2$, also speziell $v \in \text{strong traces}(T_2)$.

Aus Symmetriegründen folgt $T_1 \sim_{\text{tr}} T_2$. //

DEFINITION 3.5

vgl. [Hoare]

Es sei $T = (S, D, z)$ ein Transitionssystem. Man definiert die *schwachen Traces*:

$$\text{weak traces}(T) := \left\{ \omega' \in \text{Vis}^* \mid \exists s \in S: z \xrightarrow{\omega'} s \right\}$$

DEFINITION 3.6

vgl. [Hoare]

Zwei Transitionssysteme $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ heißen *schwach trace-äquivalent* (geschrieben $T_1 \approx_{\text{tr}} T_2$), wenn gilt: $\text{weak traces}(T_1) = \text{weak traces}(T_2)$.

BEISPIEL 3.7

Die folgenden Transitionssysteme $T_1, T_2 \in \mathbb{T}$ sind schwach trace-äquivalent (tatsächlich sogar beobachtungskongruent), aber nicht stark trace-äquivalent:



Beweis:

Wegen $a\tau \in \text{strong traces}(T_2)$, $z_1 \not\xrightarrow{a\tau}_1$ gilt sofort $T_1 \not\approx_{\text{tr}} T_2$, aber es gilt $\text{weak traces}(T_1) = \{\varepsilon, a, ab\} = \text{weak traces}(T_2)$, also $T_1 \approx_{\text{tr}} T_2$. Offensichtlich ist $B := \{(z_1, z_1), (z_2, z_2), (z_2, z_4), (z_3, z_3)\}$ eine schwache Bisimulation für $T_1 \approx T_2$, und da z_1 in beiden Systemen jeweils stabil ist, gilt mit 2.16 auch $T_1 \approx_+ T_2$.

LEMMA 3.8

[Taubner]

Es seien $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ Transitionssysteme mit $T_1 \approx T_2$. Dann gilt $T_1 \approx_{\text{tr}} T_2$.

Beweis:

Es sei $\omega \in \text{weak traces}(T_1)$, also existiert ein $r_1 \in S_1$ mit $z_1 \xrightarrow{\omega}_1 r_1$. Da eine schwache Bisimulation $B \subseteq S_1 \times S_2$, $T_1 \stackrel{B}{\approx} T_2$ existiert, gibt es ein $r_2 \in S_2$ mit $z_2 \xrightarrow{\omega}_2 r_2$, also speziell $\omega \in \text{weak traces}(T_2)$. Aus Symmetriegründen folgt $T_1 \approx_{\text{tr}} T_2$. //

SATZ 3.9

[Milner]

Es seien $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ Transitionssysteme mit $T_1 \sim_{\text{tr}} T_2$. Dann gilt $T_1 \approx_{\text{tr}} T_2$.

Beweis:

Es sei $\omega \in \text{weak traces}(T_1)$, also $z_1 \xrightarrow{\omega}_1 s_1 \in S_1$. Dann existiert ein $v \in \text{Act}^*$, $v \setminus \tau = \omega$ mit $z_1 \xrightarrow{v}_1 s_1$, also gilt $v \in \text{strong traces}(T_1) = \text{strong traces}(T_2)$ und damit $z_2 \xrightarrow{\omega}_2$, also $\omega \in \text{weak traces}(T_2)$. Aus Symmetriegründen folgt $T_1 \approx_{\text{tr}} T_2$. //

Es ist klar, daß die schwache Trace-Äquivalenz divergente Zustände nicht explizit berücksichtigt. Hierzu wird eine spezielle Variante einer Äquivalenzrelation definiert, die Divergenz-Äquivalenz.

DEFINITION 3.10

vgl. [Hoare]

Es sei $T = (S, D, z)$ ein Transitionssystem. Man definiert die Menge:

$$\text{divs}(T) := \left\{ \omega \in \text{Vis}^* \mid \omega = \omega_1 \omega_2, \omega_1, \omega_2 \in \text{Vis}^*, z \xrightarrow{\omega_1} s \in S, s \uparrow \right\}$$

BEMERKUNG 3.11

Offensichtlich ist ein Transitionssystem T genau dann divergenzfrei, wenn gilt: $\text{divs}(T) = \emptyset$.

DEFINITION 3.12

vgl. [Hoare]

Es sei $T = (S, D, z)$ ein Transitionssystem. Man definiert die *Divergenzen*:

$$\text{divergences}(T) := (\text{weak traces}(T) \cup \text{divs}(T), \text{divs}(T))$$

DEFINITION 3.13

vgl. [Hoare]

Zwei Transitionssysteme $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ heißen *divergenz-äquivalent* (geschrieben $T_1 \approx_{\text{div}} T_2$), wenn gilt: $\text{divergences}(T_1) = \text{divergences}(T_2)$.

Die folgenden Betrachtungen zeigen, daß die Divergenz-Äquivalenz im allgemeinen Fall weder stärker noch schwächer als die schwache Trace-Äquivalenz ist, aber im divergenzfreien Spezialfall mit ihr zusammenfällt.

SATZ 3.14

[Taubner]

Es seien $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ divergenzfreie Transitionssysteme. Dann gilt $T_1 \approx_{\text{tr}} T_2 \Leftrightarrow T_1 \approx_{\text{div}} T_2$.

Beweis:

[Taubner]

Es gilt $\text{divs}(T_1) = \emptyset = \text{divs}(T_2)$ nach Voraussetzung, also:

$$\begin{aligned} T_1 \approx_{\text{tr}} T_2 &\Leftrightarrow \text{weak traces}(T_1) = \text{weak traces}(T_2) \\ &\Leftrightarrow (\text{weak traces}(T_1) \cup \emptyset, \emptyset) = (\text{weak traces}(T_2) \cup \emptyset, \emptyset) \\ &\Leftrightarrow T_1 \approx_{\text{div}} T_2. // \end{aligned}$$

BEISPIEL 3.15

Die folgenden Transitionssysteme $T_1, T_2 \in \mathbb{T}$ sind divergenz-äquivalent, aber nicht schwach trace-äquivalent:



Beweis:

Offensichtlich gilt einerseits:

$$\text{weak traces}(T_1) = \{\varepsilon, a, ab\} \neq \{\varepsilon, a, ac\} = \text{weak traces}(T_2), \text{ also } T_1 \not\approx_{tr} T_2.$$

$$\text{Andererseits gilt aber } \text{divs}(T_1) = \{a\omega \mid \omega \in \text{Vis}^*\} = \text{divs}(T_2)$$

und wegen $ab \in \text{divs}(T_2)$ und $ac \in \text{divs}(T_1)$ somit:

$$\text{divergences}(T_1) = (\text{divs}(T_1), \text{divs}(T_1)) = (\text{divs}(T_2), \text{divs}(T_2)) = \text{divergences}(T_2).$$

Daraus folgt $T_1 \approx_{div} T_2$.

BEISPIEL 3.16

Die folgenden Transitionssysteme $T_1, T_2 \in \mathbb{T}$ sind schwach trace-äquivalent (tatsächlich sogar beobachtungskongruent), aber nicht divergenz-äquivalent:

**Beweis:**

Offensichtlich gilt $\text{weak traces}(T_1) = \{\varepsilon, a, ab\} = \text{weak traces}(T_2)$,

also $T_1 \approx_{tr} T_2$.

Andererseits gilt $\text{divs}(T_1) = \{a\omega \mid \omega \in \text{Vis}^*\} \neq \emptyset = \text{divs}(T_2)$,

und damit folgt sofort $T_1 \not\approx_{div} T_2$.

$B := \{(z_1, z_1), (z_2, z_2), (z_3, z_3)\}$ ist offenbar eine schwache Bisimulation für $T_1 \approx T_2$, und da z_1 in beiden Systemen jeweils stabil ist, gilt mit 2.16 auch $T_1 \approx_+ T_2$.

Das letzte Beispiel zeigt, daß die schwache Bisimulation im allgemeinen Fall nicht die Divergenz-Äquivalenz impliziert. Es ist aber möglich, die schwache Bisimulation so zu verfeinern, daß sie Divergenz berücksichtigt:

DEFINITION 3.17

vgl. [Ol/Ho]

Es seien $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ Transitionssysteme.

Eine Relation $B \subseteq S_1 \times S_2$ mit $(s_1, s_2) \in B$ heißt *divergente Bisimulation* für (s_1, s_2) , wenn B schwache Bisimulation für $T_1 \approx T_2$ ist und für alle $(r_1, r_2) \in B$ gilt: $r_1 \uparrow \Leftrightarrow r_2 \uparrow$.

Man definiert $T_1 \approx_{\uparrow} T_2 \Leftrightarrow \exists B$ divergente Bisimulation für (z_1, z_2) ,

B heißt dann *divergente Bisimulation* für $T_1 \approx_{\uparrow} T_2$,

und man schreibt dafür auch $T_1 \stackrel{B}{\approx}_{\uparrow} T_2$.

SATZ 3.18

Es seien $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ Transitionssysteme. Dann gilt:

- i) $T_1 \approx_{\uparrow} T_2 \Rightarrow T_1 \approx T_2$.
- ii) $T_1 \approx_{\uparrow} T_2 \Leftrightarrow T_1 \approx T_2$, falls T_1, T_2 divergenzfrei sind.

Beweis:

i) klar

ii) Es sei $B \subseteq S_1 \times S_2$, $T_1 \stackrel{B}{\approx}_{\uparrow} T_2$ eine schwache Bisimulation.

Man definiert $\bar{B} \subseteq S_1 \times S_2$ mit $(r_1, r_2) \in \bar{B} \Leftrightarrow (r_1, r_2) \in B$,

wobei für (r_1, r_2) ein $\omega \in \text{Vis}^*$ mit $z_1 \xrightarrow{\omega}_1 r_1$ und $z_2 \xrightarrow{\omega}_2 r_2$ existiert.

Es seien $(r_1, r_2) \in \bar{B}$, $\alpha \in \text{Vis}$ beliebig und gelte $r_1 \xrightarrow{\alpha}_1 r'_1$.

Dann existiert ein $r'_2 \in S_2$ mit $r_2 \xrightarrow{\alpha}_2 r'_2$ und $(r'_1, r'_2) \in \bar{B}$.

Wegen $z_1 \xrightarrow{\omega\alpha}_1 r'_1$ und $z_2 \xrightarrow{\omega\alpha}_2 r'_2$ gilt $(r'_1, r'_2) \in \bar{B}$.

Aus Symmetriegründen ist \bar{B} damit eine schwache Bisimulation für (z_1, z_2) , und da T_1, T_2 divergenzfrei sind, gilt für alle $(r_1, r_2) \in \bar{B}$: $r_1 \uparrow$ und $r_2 \uparrow$.

Daraus folgt $T_1 \approx_{\uparrow} T_2$. //

BEMERKUNG 3.19

Die Transitionssysteme $T_1, T_2 \in \mathbb{T}$ aus Beispiel 3.7 sind divergenzfrei und deshalb auch divergent bisimilar.

LEMMA 3.20

[Taubner]

Es seien $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ Transitionssysteme und B eine starke Bisimulation für $T_1 \sim T_2$. Dann gilt für alle $(r_1, r_2) \in B$: $r_1 \uparrow \Leftrightarrow r_2 \uparrow$.

Beweis:

[Taubner]

Es gelte $r_1 \uparrow$, also existiert $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $s_0 = r_1$, $s_{i-1} \xrightarrow{\tau}_1 s_i \ \forall i \in \mathbb{N}$.

Man definiere rekursiv $(\bar{s}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit Hilfe von $B \subseteq S_1 \times S_2$, $T_1 \stackrel{B}{\sim} T_2$:

$i = 0$)

$\bar{s}_0 := r_2$, dann gilt $(s_0, \bar{s}_0) = (r_1, r_2) \in B$

$i - 1 \rightarrow i$)

Wegen $(s_{i-1}, \bar{s}_{i-1}) \in B$ nach rekursiver Konstruktion und $s_{i-1} \xrightarrow{\tau}_1 s_i$ nach

Voraussetzung existiert ein $\bar{s}_i \in S_2$ mit $\bar{s}_{i-1} \xrightarrow{\tau}_2 \bar{s}_i$, $(s_i, \bar{s}_i) \in B$.

Also gilt für $(\bar{s}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$: $\bar{s}_0 = r_2$ und aus $\bar{s}_{i-1} \xrightarrow{\tau}_2 \bar{s}_i \ \forall i \in \mathbb{N}$ folgt $r_2 \uparrow$.

Aus Symmetriegründen folgt auch $r_2 \uparrow \Rightarrow r_1 \uparrow$. //

SATZ 3.21

Es seien $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ Transitionssysteme mit $T_1 \sim T_2$.

Dann gilt $T_1 \approx_{\uparrow} T_2$.

Beweis:

Es existiert eine starke Bisimulation B für $T_1 \sim T_2$.

Nach Lemma 2.12 ist B schwache Bisimulation für $T_1 \sim T_2$,

und die Zusatzbedingung folgt aus Lemma 3.20. //

LEMMA 3.22

Es seien $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ Transitionssysteme mit $T_1 \approx_{\uparrow} T_2$.

Dann gilt $\text{divs}(T_1) = \text{divs}(T_2)$.

Beweis:

Es existiert eine divergente Bisimulation B für $T_1 \approx_{\uparrow} T_2$.

Es sei $\omega \in \text{divs}(T_1)$, also $\omega = \omega_1 \omega_2$, $z_1 \xrightarrow{\omega_1}_1 r_1 \in S_1$, $r_1 \uparrow$.

Wegen $T_1 \stackrel{B}{\approx}_{\uparrow} T_2$ existiert ein $r_2 \in S_2$ mit $z_2 \xrightarrow{\omega_1}_2 r_2$, $r_2 \uparrow$,

und damit gilt $\omega = \omega_1 \omega_2 \in \text{divs}(T_2)$.

Aus Symmetriegründen folgt auch $\text{divs}(T_2) \subseteq \text{divs}(T_1)$. //

LEMMA 3.23

Es seien $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ Transitionssysteme mit $T_1 \approx_{\tau} T_2$.
Dann gilt $T_1 \approx_{div} T_2$.

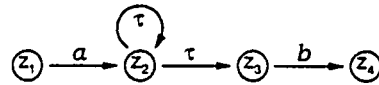
Beweis:

Nach Lemma 3.22 gilt $divs(T_1) = divs(T_2)$,

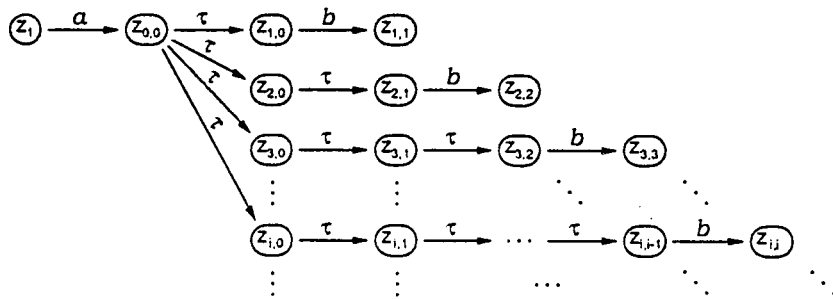
und nach Satz 3.18 und Satz 3.8 gilt $weak\ traces(T_1) = weak\ traces(T_2)$. //

BEISPIEL 3.24

Die folgenden Transitionssysteme $T_1, T_2 \in \mathbb{T}$ sind stark trace-äquivalent, aber nicht divergenz-äquivalent. Es sei T_1 :



und T_2 :



Explizit ist $T_2 = (S_2, D_2, z_1)$ mit $S_2 = \{z_1, z_{0,0}\} \cup \{z_{i,j} \mid i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}_0, j \leq i\}$ und
 $D_2 = \{(z_1, a, z_{0,0})\} \cup \{(z_{0,0}, \tau, z_{i,0}) \mid i \in \mathbb{N}\}$
 $\cup \{(z_{i,j-1}, \tau, z_{i,j}) \mid i, j \in \mathbb{N}, j < i\} \cup \{(z_{i,i-1}, b, z_{i,i}) \mid i \in \mathbb{N}\}$

Beweis:

T_2 ist divergenzfrei, denn $z_{0,0} \xrightarrow{\tau} s \in S_2$ impliziert $s = z_{k,0}$, $k \in \mathbb{N}$ mit $z_{k,0} \xrightarrow{\tau^k} z_{k,k}$, also gilt $divs(T_2) = \emptyset$.

Andererseits gilt $divs(T_1) = \{a\omega \mid \omega \in Vis^*\} \neq \emptyset$, und damit $T_1 \not\approx_{div} T_2$.

Es gilt aber offensichtlich:

$$\begin{aligned} strong\ traces(T_1) &= \{\varepsilon\} \cup \{a\tau^k \mid k \in \mathbb{N}_0\} \cup \{a\tau^k b \mid k \in \mathbb{N}\} \\ &= strong\ traces(T_2) \end{aligned}$$

und damit $T_1 \sim_{tr} T_2$.

Das Transitionssystem T_2 in Beispiel 3.24 ist im Zustand $z_{0,0}$ nicht endlich verzweigend. Die folgenden Betrachtungen zeigen, daß im endlich verzweigenden Fall die starke Trace-Äquivalenz tatsächlich die Divergenz-Äquivalenz impliziert.

LEMMA 3.25

Es sei $T = (S, D, z)$ ein endlich verzweigendes Transitionssystem, $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Aktionen $\alpha_n \in \text{Act}$ und $s \in S$ ein Zustand mit der Eigenschaft $s \xrightarrow{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Dann existiert eine Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ von Zuständen $s_n \in S$ mit der Eigenschaft $s_0 = s$, $s_{i-1} \xrightarrow{\alpha_i} s_i \forall i \in \mathbb{N}$ und $s_i \xrightarrow{\alpha_{i+1} \alpha_{i+2} \cdots \alpha_k} \forall k > i$.

Beweis:

Rekursive Konstruktion von $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$:

$n = 0$)

Setze $s_0 := s$, dann gilt auch $s_0 \xrightarrow{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k} \forall k > 0$.

$n - 1 \rightarrow n$)

s_0, s_1, \dots, s_{n-1} sind bereits konstruiert, und es gilt $s_{n-1} \xrightarrow{\alpha_n \alpha_{n+1} \cdots \alpha_k} \forall k > n - 1$.

Da $T \in \mathbb{T}$ endlich verzweigend ist, ist also speziell die Menge

$M := \{s' \in S \mid (s_{n-1}, \alpha_n, s') \in D\}$ endlich.

Nach Induktionsvoraussetzung existiert für jedes $k > n$ ein $s'_k \in M$

mit $s_{n-1} \xrightarrow{\alpha_n} s'_k \xrightarrow{\alpha_{n+1} \alpha_{n+2} \cdots \alpha_k}$.

Da M aber nur endlich ist, existiert eine konstante Teilfolge $(s'_{l_k})_{k > n}$ von $(s'_k)_{k > n}$ mit $s'_{l_k} = \bar{s} \in S \forall k$.

Man definiert $s_n := \bar{s}$, und erhält damit $s_{n-1} \xrightarrow{\alpha_n} s_n$

und $s_n \xrightarrow{\alpha_{n+1} \alpha_{n+2} \cdots \alpha_{l_k}} \forall k > n$.

Wegen $l_k \geq k$ gilt damit aber erst recht $s_n \xrightarrow{\alpha_{n+1} \alpha_{n+2} \cdots \alpha_k} \forall k > n$. //

LEMMA 3.26

Es seien $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ endlich verzweigende Transitionssysteme mit $T_1 \sim_{tr} T_2$. Dann gilt $\text{divs}(T_1) = \text{divs}(T_2)$.

Beweis:

Es sei $\omega \in \text{divs}(T_1)$, also $\omega = \omega_1 \omega_2$ mit $z_1 \xRightarrow{\omega_1} s \in S_1$ und $s \uparrow$.

Das heißt, es existiert ein $v \in \text{Act}^*$, $\omega_1 = v \setminus \tau$ mit $z_1 \xrightarrow{v} s$,

und speziell gilt $s \xrightarrow{\tau^k} \forall k \in \mathbb{N}$.

Damit gilt $v\tau^k \in \text{strong traces}(T_1) = \text{strong traces}(T_2) \forall k \in \mathbb{N}$,

also $z_2 \xrightarrow{v\tau^k} \forall k$. Nach Lemma 3.25 existiert damit eine Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$

von Zuständen $s_n \in S_2$ mit zunächst $z_2 \xrightarrow{v} s_k, k = |v|$,

und weiter $s_{i-1} \xrightarrow{\tau} s_i \forall i > k$.

Somit gilt sofort $s_k \uparrow$, also wegen $z_2 \xRightarrow{\omega_1} s_k$ auch $\omega \in \text{divs}(T_2)$.

Aus Symmetriegründen folgt auch $\text{divs}(T_2) \subseteq \text{divs}(T_1)$. //

SATZ 3.27

Es seien $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ endlich verzweigende Transitionssysteme mit $T_1 \sim_{tr} T_2$. Dann gilt $T_1 \approx_{div} T_2$.

Beweis:

Nach Lemma 3.26 gilt $\text{divs}(T_1) = \text{divs}(T_2)$,

und nach Satz 3.9 gilt $\text{weak traces}(T_1) = \text{weak traces}(T_2)$. //

Es folgt noch eine Verallgemeinerung der schwachen Traces für einen beliebigen Zustand $s \in S$.

DEFINITION 3.28

[Taubner]

Es sei $T = (S, D, z)$ ein Transitionssystem. Man definiert für $s \in S$ die Menge:

$$\text{initials}(s) := \left\{ \alpha \in \text{Vis} \mid s \xrightarrow{\alpha} \right\}$$

LEMMA 3.29

[Taubner]

Es seien $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ Transitionssysteme mit $T_1 \approx T_2$.

Dann gilt für alle $(r_1, r_2) \in B$: $\text{initials}(r_1) = \text{initials}(r_2)$.

Beweis:

[Taubner]

Es sei $\alpha \in \text{initials}(r_1)$, also existiert ein $r'_1 \in S_1$ mit $r_1 \xrightarrow{\alpha}_1 r'_1$.

Wegen $T_1 \approx T_2$ existiert ein $r'_2 \in S_2$ mit $r_2 \xrightarrow{\alpha}_2 r'_2$, also $\alpha \in \text{initials}(r_2)$.

Aus Symmetriegründen folgt auch $\text{initials}(r_2) \subseteq \text{initials}(r_1)$. //

§4 Failure-Äquivalenzen

Feinere Äquivalenzrelationen als die Trace-Äquivalenzen sind die Failure-Äquivalenzen. Unter einem „Failure“ versteht man jeweils ein Paar aus einem Pfad und einer Menge von Aktionen. Mit dem Pfad ist ein Zustand erreichbar, von dem aus keine der Aktionen der Menge mehr ausführbar ist (es bedeutet also nicht, daß die Aktionen von allen mit dem Pfad erreichbaren Zuständen aus nicht ausführbar sind).

Im Gegensatz zu den Trace-Äquivalenzen spielen damit die Verzweigungsmöglichkeiten des Systems eine Rolle, allerdings schwächer, als dies bei den Bisimulationen der Fall ist.

DEFINITION 4.1

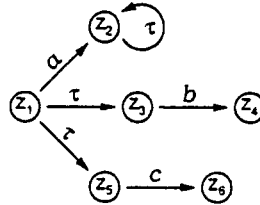
vgl. [Hoare]

Es sei $T = (S, D, z)$ ein Transitionssystem. Man definiert die *starken Failures*:

$$\text{strong failures}(T) := \left\{ (v, X) \mid v \in \text{Act}^*, X \subseteq \text{Act}, z \xrightarrow{v} s \in S, s \not\xrightarrow{\alpha} \forall \alpha \in X \right\}$$

BEISPIEL 4.2

Man betrachte das folgende Transitionssystem $T \in \mathbb{T}$:



Die starken Failures von T sind:

$$\begin{aligned} \text{strong failures}(T) = & \underbrace{(\{\varepsilon\} \times \mathcal{P}(\text{Act} \setminus \{a, \tau\}))}_{z_1} \cup \underbrace{(\{a\tau^k \mid k \in \mathbb{N}_0\} \times \mathcal{P}(\text{Act} \setminus \{\tau\}))}_{z_2} \\ & \cup \underbrace{(\{\tau\} \times \mathcal{P}(\text{Act} \setminus \{b\}))}_{z_3} \cup \underbrace{(\{\tau\} \times \mathcal{P}(\text{Act} \setminus \{c\}))}_{z_5} \cup \underbrace{(\{\tau b, \tau c\} \times \mathcal{P}(\text{Act}))}_{z_4, z_6} \end{aligned}$$

DEFINITION 4.3

vgl. [Hoare]

Zwei Transitionssysteme $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ heißen *stark failure-äquivalent* (geschrieben $T_1 \sim_f T_2$), wenn gilt: $\text{strong failures}(T_1) = \text{strong failures}(T_2)$.

BEISPIEL 4.4

Die folgenden Transitionssysteme $T_1, T_2 \in \mathbb{T}$ sind stark trace-äquivalent, aber nicht stark failure-äquivalent:



Beweis:

Offensichtlich gilt $strong\ traces(T_1) = \{\varepsilon, a, ab, ac\} = strong\ traces(T_2)$, also $T_1 \sim_{tr} T_2$.

Es gilt aber wegen $z_1 \xrightarrow{a}_2 z_2$ und $z_2 \not\xrightarrow{c}_2$: $(a, \{c\}) \in strong\ failures(T_2)$, während andererseits für $z_1 \xrightarrow{a}_1 s \in S_1$ nur $s = z_2$ in Frage kommt, und dann $z_2 \xrightarrow{c}_1$ gilt.

Also gilt $(a, \{c\}) \notin strong\ failures(T_1)$ und damit $T_1 \not\sim_f T_2$.

BEISPIEL 4.5

[Milner]

Die folgenden Transitionssysteme $T_1, T_2 \in \mathbb{T}$ sind stark failure-äquivalent, aber nicht schwach bisimilar:

**Beweis:**

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 strong\ failures(T_1) &= (\{\varepsilon\} \times \mathcal{P}(\text{Act} \setminus \{a\})) \\
 &\cup (\{a\} \times \mathcal{P}(\text{Act} \setminus \{d\})) \\
 &\cup (\{ad\} \times \mathcal{P}(\text{Act} \setminus \{b\})) \cup (\{ad\} \times \mathcal{P}(\text{Act} \setminus \{c\})) \\
 &\cup (\{adb, adc\} \times \mathcal{P}(\text{Act})) \\
 &= strong\ failures(T_2)
 \end{aligned}$$

und damit $T_1 \sim_f T_2$.

Angenommen, es existiert $B \subseteq S_1 \times S_2$, $T_1 \stackrel{B}{\sim} T_2$.

$z_1 \xrightarrow{a}_2 z_2$ erzwingt $z_1 \xrightarrow{a}_1 z_2$, $(z_2, z_2) \in B$, aber es gilt $z_2 \xrightarrow{dc}_1 z_6$, $z_2 \not\xrightarrow{dc}_2$. \nmid

SATZ 4.6

[Milner]

Es seien $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ Transitionssysteme mit $T_1 \sim T_2$.

Dann gilt $T_1 \sim_f T_2$.

Beweis:

[Milner]

Es sei $(v, X) \in strong\ failures(T_1)$, also $z_1 \xrightarrow{v}_1 r_1 \in S_1$, $r_1 \not\xrightarrow{\alpha}_1 \forall \alpha \in X$.

Da es ein $B \subseteq S_1 \times S_2$ mit $T_1 \stackrel{B}{\sim} T_2$ gibt, existiert ein $r_2 \in S_2$

mit $z_2 \xrightarrow{v}_2 r_2$, $(r_1, r_2) \in B$.

Angenommen, es existiert ein $\alpha \in X$ mit $r_2 \xrightarrow{\alpha}_2 r'_2 \in S_2$, dann existiert auch ein $r'_1 \in S_1$ mit $r_1 \xrightarrow{\alpha}_1 r'_1$, $(r'_1, r'_2) \in B$, also speziell $r_1 \xrightarrow{\alpha}_1$. \nmid

Aus Symmetriegründen folgt $T_1 \sim_f T_2$. //

SATZ 4.7

[Milner]

Es seien $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ Transitionssysteme mit $T_1 \sim_f T_2$.

Dann gilt $T_1 \sim_{tr} T_2$.

Beweis:

[Milner]

Es sei $v \in \text{strong traces}(T_1)$, dann gilt offensichtlich:

$(v, \emptyset) \in \text{strong failures}(T_1) = \text{strong failures}(T_2)$

und damit folgt sofort $z_2 \xrightarrow{v} z_2$, also $v \in \text{strong traces}(T_2)$.

Aus Symmetriegründen folgt $T_1 \sim_{\tau} T_2$. //

Nachdem die starke Failure-Äquivalenz also zwischen der starken Bisimulation und der starken Trace-Äquivalenz liegt, würde man für eine schwache Failure-Äquivalenz erwarten, daß sie einerseits von der starken Failure-Äquivalenz impliziert wird und andererseits zwischen der schwachen Bisimulation und der schwachen Trace-Äquivalenz liegt.

Überraschenderweise ist das im allgemeinen Fall nicht richtig. [Milner] und [Taubner] (bzw. [Hoare]) definieren unterschiedliche schwache Failure-Äquivalenzen, die nicht zwischen schwacher Bisimulation und schwacher Trace-Äquivalenz liegen (die letztere wird zusätzlich nicht einmal von der starken Failure-Äquivalenz impliziert).

DEFINITION 4.8

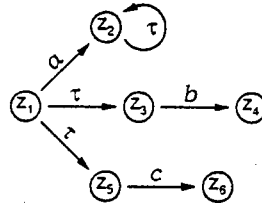
[Milner]

Es sei $T = (S, D, z)$ ein Transitionssystem. Man definiert die *stabilen Failures*¹.

$$\text{stable failures}(T) := \left\{ (\omega, X) \mid \omega \in \text{Vis}^*, X \subseteq \text{Vis}, z \xRightarrow{\omega} s \in S, s \not\xrightarrow{\alpha} \forall \alpha \in X \cup \{\tau\} \right\}$$

BEISPIEL 4.9

Man betrachte wieder das Transitionssystem $T \in \mathbb{T}$ aus Beispiel 4.2:



Die Zustände z_1 und z_2 sind nicht stabil, also sind die stabilen Failures von T :

$$\text{stable failures}(T) = \underbrace{(\{\varepsilon\} \times \mathcal{P}(\text{Vis} \setminus \{b\}))}_{z_3} \cup \underbrace{(\{\varepsilon\} \times \mathcal{P}(\text{Vis} \setminus \{c\}))}_{z_5} \cup \underbrace{(\{b, c\} \times \mathcal{P}(\text{Vis}))}_{z_4, z_6}$$

Hier wird bereits eine besondere Eigenschaft der stabilen Failures deutlich:

Da mit der Aktion a nach endlich vielen τ -Aktionen kein stabiler Zustand erreicht werden kann, ist zum Beispiel $(a, \{b\})$ entgegen der Anschauung kein (stabiler) Failure.

DEFINITION 4.10

[Milner]

Zwei Transitionssysteme $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ heißen

stabil failure-äquivalent (geschrieben $T_1 \approx_f T_2$)²,

wenn gilt: $\text{stable failures}(T_1) = \text{stable failures}(T_2)$.

¹ [Milner] definiert die stabilen Failures als „(weak) failures“

² [Milner] definiert stabil failure-äquivalent als „weak failure-äquivalent“

4.8 und 4.10 sind nicht die „natürliche“ Definition, die man (analog zu anderen schwachen Äquivalenz-Varianten) erwarten würde. Aus der Definition der stabilen Failures folgt, daß nur Zustände s betrachtet werden, die stabil sind, und damit τ -Aktionen nicht vollständig ignoriert werden.

Es wird sich erweisen, daß durch diese Zusatzbedingung die Implikation durch die starke Failure-Äquivalenz sichergestellt wird, auf der anderen Seite aber bei divergierenden Transitionssystemen nicht die Trace-Äquivalenz impliziert werden kann.

SATZ 4.11

[Milner]

Es seien $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ Transitionssysteme mit $T_1 \sim_f T_2$.

Dann gilt $T_1 \approx_f T_2$.

Beweis:

[Milner]

Es sei $(\omega, X) \in \text{stable failures}(T_1)$, also $z_1 \xrightarrow{\omega}_1 s_1 \in S_1, s_1 \not\xrightarrow{\alpha}_1 \forall \alpha \in X \cup \{\tau\}$.

Dann existiert $v \in \text{Act}^*$ mit $\omega = v \setminus \tau$ und $z_1 \xrightarrow{v}_1 s_1 \in S_1, s_1 \not\xrightarrow{\alpha}_1 \forall \alpha \in X \cup \{\tau\}$, und es gilt $(v, X \cup \{\tau\}) \in \text{strong failures}(T_1) = \text{strong failures}(T_2)$.

Das heißt $z_2 \xrightarrow{v}_2 s_2 \in S_2, s_2 \not\xrightarrow{\alpha}_2 \forall \alpha \in X \cup \{\tau\}$,

und damit $z_2 \xrightarrow{\omega}_2 s_2, s_2 \not\xrightarrow{\alpha}_2 \forall \alpha \in X \cup \{\tau\}$,

woraus folgt: $(\omega, X) \in \text{stable failures}(T_2)$.

Aus Symmetriegründen folgt $T_1 \approx_f T_2$. //

Definiert man die schwache Failure-Äquivalenz auf „natürliche“ Weise (in Analogie zur schwachen/starken Bisimulation oder Trace-Äquivalenz), dann liegt sie tatsächlich zwischen schwacher Bisimulation und schwacher Trace-Äquivalenz.

Es wird sich aber später zeigen, daß die soeben gezeigte Implikation nicht mehr gilt.

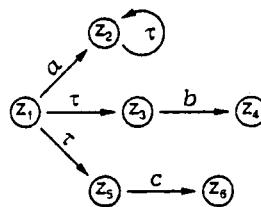
DEFINITION 4.12

Es sei $T = (S, D, z)$ ein Transitionssystem. Man definiert die *schwachen Failures*:

$$\text{fails}(T) := \left\{ (\omega, X) \mid \omega \in \text{Vis}^*, X \subseteq \text{Vis}, z \xrightarrow{\omega} s \in S, s \not\xrightarrow{\alpha} \forall \alpha \in X \right\}$$

BEISPIEL 4.13

Man betrachte wieder das Transitionssystem $T \in \mathbb{T}$ aus Beispiel 4.2:



Die schwachen Failures von T sind:

$$\begin{aligned}
 \text{fails}(T) &= \underbrace{(\{\varepsilon\} \times \mathcal{P}(\text{Vis} \setminus \{a, b, c\}))}_{z_1} \cup \underbrace{(\{\varepsilon\} \times \mathcal{P}(\text{Vis} \setminus \{b\}))}_{z_3} \\
 &\quad \cup \underbrace{(\{\varepsilon\} \times \mathcal{P}(\text{Vis} \setminus \{c\}))}_{z_5} \cup \underbrace{(\{a, b, c\} \times \mathcal{P}(\text{Vis}))}_{z_2, z_4, z_6} \\
 &= (\{\varepsilon\} \times \mathcal{P}(\text{Vis} \setminus \{b\})) \cup (\{\varepsilon\} \times \mathcal{P}(\text{Vis} \setminus \{c\})) \cup (\{a, b, c\} \times \mathcal{P}(\text{Vis}))
 \end{aligned}$$

DEFINITION 4.14

Zwei Transitionssysteme $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ heißen *schwach failure-äquivalent* (geschrieben $T_1 \approx_{wf} T_2$), wenn gilt: $\text{fails}(T_1) = \text{fails}(T_2)$.

SATZ 4.15

Es seien $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ Transitionssysteme mit $T_1 \approx T_2$. Dann gilt $T_1 \approx_{wf} T_2$.

Beweis:

Es sei $(\omega, X) \in \text{fails}(T_1)$, also $z_1 \xrightarrow{\omega}_1 r_1 \in S_1$, $r_1 \not\xrightarrow{\alpha}_1 \forall \alpha \in X$.

Da es ein $B \subseteq S_1 \times S_2$ mit $T_1 \stackrel{B}{\approx} T_2$ gibt, existiert ein $r_2 \in S_2$ mit $z_2 \xrightarrow{\omega}_2 r_2$, $(r_1, r_2) \in B$.

Angenommen, es existiert ein $\alpha \in X$ mit $r_2 \xrightarrow{\alpha}_2 r'_2 \in S_2$, dann existiert auch wieder ein $r'_1 \in S_1$ mit $r_1 \xrightarrow{\alpha}_1 r'_1$, $(r'_1, r'_2) \in B$, also speziell $r_1 \xrightarrow{\alpha}_1$. \nmid

Aus Symmetriegründen folgt $T_1 \approx_{wf} T_2$. //

SATZ 4.16

Es seien $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ Transitionssysteme mit $T_1 \approx_{wf} T_2$. Dann gilt $T_1 \approx_{tr} T_2$.

Beweis:

Es sei $\omega \in \text{weak traces}(T_1)$, dann gilt offensichtlich:

$(\omega, \emptyset) \in \text{fails}(T_1) = \text{fails}(T_2)$ und damit sofort $z_2 \xrightarrow{\omega}_2$, also $\omega \in \text{weak traces}(T_2)$.

Aus Symmetriegründen folgt $T_1 \approx_{tr} T_2$. //

Es folgt nun eine dritte Definition einer schwachen Failure-Äquivalenz, die im allgemeinen Fall sogar keine der oben beschriebenen Forderungen erfüllt.

Erreicht ein System einen divergenten Zustand und führt danach nur noch unsichtbare Aktionen aus, dann wird dies so berücksichtigt, als könne das System keine sichtbaren Aktionen mehr ausführen.

DEFINITION 4.17

vgl. [Taubner, Hoare]

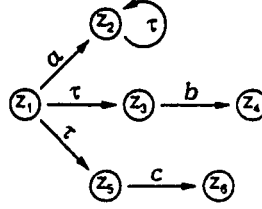
Es sei $T = (S, D, z)$ ein Transitionssystem. Man definiert die *divergenten Failures*¹:

$$\text{div failures}(T) := (\text{fails}(T) \cup (\text{divs}(T) \times \mathcal{P}(\text{Vis})), \text{divs}(T))$$

¹ [Taubner] definiert die divergenten Failures als „failures“

BEISPIEL 4.18

Man betrachte wieder das Transitionssystem $T \in \mathbb{T}$ aus Beispiel 4.2:



Die divergenten Failures von T sind:

$$\Pi_1(\text{div failures}(T)) = (\{\varepsilon\} \times \mathcal{P}(\text{Vis} \setminus \{b\})) \cup (\{\varepsilon\} \times \mathcal{P}(\text{Vis} \setminus \{c\})) \\ \cup (\{a\omega \mid \omega \in \text{Vis}^*\} \times \mathcal{P}(\text{Vis})) \cup (\{b, c\} \times \mathcal{P}(\text{Vis}))$$

$$\text{und } \Pi_2(\text{div failures}(T)) = \text{divs}(T) = \{a\omega \mid \omega \in \text{Vis}^*\}$$

DEFINITION 4.19

vgl. [Taubner, Hoare]

Zwei Transitionssysteme $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ heißen

divergent failure-äquivalent (geschrieben $T_1 \approx_{df} T_2$)¹,

wenn gilt: $\text{div failures}(T_1) = \text{div failures}(T_2)$.

SATZ 4.20

Es seien $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ Transitionssysteme mit $T_1 \approx_{\uparrow} T_2$.

Dann gilt $T_1 \approx_{df} T_2$.

Beweis:

vgl. [Taubner]

Nach 3.22 gilt bereits $\text{divs}(T_1) = \text{divs}(T_2)$,

es sei also $(\omega, X) \in \text{fails}(T_1) \cup (\text{divs}(T_1) \times \mathcal{P}(\text{Vis}))$.

Fall 1) $(\omega, X) \in \text{fails}(T_1)$,

also $z_1 \xRightarrow{\omega}_1 r_1 \in S_1$, $X \subseteq \text{Vis} \setminus \text{initials}(r_1)$.

Da es ein $B \subseteq S_1 \times S_2$ mit $T_1 \stackrel{B}{\equiv} T_2$ gibt, gilt: $\exists r_2 \in S_2: z_2 \xRightarrow{\omega}_2 r_2$, $(r_1, r_2) \in B$.

Nach 3.29 gilt $\text{initials}(r_1) = \text{initials}(r_2)$, also $X \subseteq \text{Vis} \setminus \text{initials}(r_2)$,

damit gilt $(\omega, X) \in \text{fails}(T_2) \subseteq \text{fails}(T_2) \cup (\text{divs}(T_2) \times \mathcal{P}(\text{Vis}))$.

Fall 2) $(\omega, X) \in \text{divs}(T_1) \times \mathcal{P}(\text{Vis})$,

also $\omega \in \text{divs}(T_1) = \text{divs}(T_2)$ nach 3.22 und $X \subseteq \text{Vis}$.

Somit gilt $(\omega, X) \in \text{divs}(T_2) \times \mathcal{P}(\text{Vis}) \subseteq \text{fails}(T_2) \cup (\text{divs}(T_2) \times \mathcal{P}(\text{Vis}))$.

In beiden Fällen gilt also $(\omega, X) \in \text{fails}(T_2) \cup (\text{divs}(T_2) \times \mathcal{P}(\text{Vis}))$.

Aus Symmetriegründen folgt $\text{div failures}(T_1) = \text{div failures}(T_2)$. //

SATZ 4.21

[Taubner]

Es seien $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ Transitionssysteme mit $T_1 \approx_{df} T_2$.

Dann gilt $T_1 \approx_{div} T_2$.

¹ [Taubner] definiert divergent failure-äquivalent als „failure-äquivalent“

Beweis:

[Taubner]

Wegen $T_1 \approx_{df} T_2$ gilt sofort $divs(T_1) = divs(T_2)$.

Es sei $\omega \in weak\ traces(T_1)$, also $\exists r_1 \in S_1: z_1 \xrightarrow{\omega}_1 r_1$.

Offensichtlich gilt $(\omega, \emptyset) \in fails(T_1) \subseteq \Pi_1(div\ failures(T_1))$ und wegen

$T_1 \approx_{df} T_2$ damit $(\omega, \emptyset) \in \Pi_1(div\ failures(T_2)) = fails(T_2) \cup (divs(T_2) \times \mathcal{P}(Vis))$.

Fall 1) $(\omega, \emptyset) \in fails(T_2)$,

dann gilt $z_2 \xrightarrow{\omega}_2 r_2 \in S_2$, speziell also $\omega \in weak\ traces(T_2)$

Fall 2) $(\omega, \emptyset) \in divs(T_2) \times \mathcal{P}(Vis)$,

also $\omega \in divs(T_2)$

In beiden Fällen gilt $\omega \in weak\ traces(T_2) \cup divs(T_2)$,

und aus Symmetriegründen folgt $T_1 \approx_{div} T_2$ //

Es wird nun gezeigt, daß alle drei angeführten schwachen Failure-Äquivalenzen im divergenzfreien Spezialfall zusammenfallen, im allgemeinen aber unterschiedlich sind.

LEMMA 4.22

i) Für alle Transitionssysteme T gilt:

$$stable\ failures(T) \subseteq weak\ failures(T)$$

ii) Für alle divergenzfreien Transitionssysteme T gilt:

$$weak\ failures(T) \subseteq stable\ failures(T)$$

Beweis:

i) Es sei $(\omega, X) \in stable\ failures(T)$, also $z \xrightarrow{\omega} s \in S$, $s \not\xrightarrow{\alpha} \forall \alpha \in X \cup \{\tau\}$.

Wegen $s \not\xrightarrow{\tau}$ gilt $s \not\xrightarrow{\alpha} \forall \alpha \in X$ und damit $(\omega, X) \in weak\ failures(T)$. //

ii) Es sei $(\omega, X) \in weak\ failures(T)$, also $z \xrightarrow{\omega} s \in S$, $s \not\xrightarrow{\alpha} \forall \alpha \in X$.

Wegen $divs(T) = \emptyset$ existieren $k \in \mathbb{N}_0$, $s' \in S$ mit $s \xrightarrow{\tau^k} s' \not\xrightarrow{\tau}$,
also $z \xrightarrow{\omega} s'$, $s' \not\xrightarrow{\tau}$.

Angenommen, es existiert ein $\alpha \in X$ mit $s' \xrightarrow{\alpha} s'' \in S$,

dann gilt auch $s \xrightarrow{\alpha} s''$ und damit $\alpha \in X$. \nmid

Also gilt $(\omega, X) \in stable\ failures(T)$. //

SATZ 4.23

Für alle divergenzfreien Transitionssysteme $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ gilt:

$$T_1 \approx_f T_2 \Leftrightarrow T_1 \approx_{df} T_2 \Leftrightarrow T_1 \approx_{wf} T_2$$

Beweis:

i) folgt direkt aus 4.22

ii) Wegen $divs(T_1) = \emptyset = divs(T_2)$ gilt:

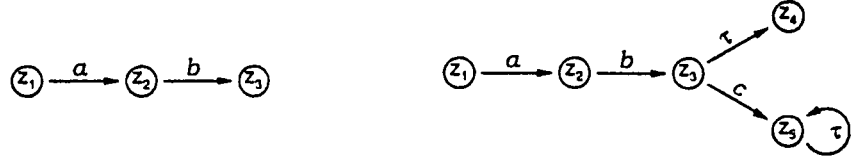
$$T_1 \approx_{df} T_2 \Leftrightarrow (fails(T_1) \cup \emptyset, \emptyset) = (fails(T_2) \cup \emptyset, \emptyset)$$

$$\Leftrightarrow fails(T_1) = fails(T_2)$$

$$\Leftrightarrow T_1 \approx_{wf} T_2 \quad //$$

BEISPIEL 4.24

Die folgenden Transitionssysteme $T_1, T_2 \in \mathbb{T}$ sind stabil failure-äquivalent, aber weder schwach trace-äquivalent noch Divergenz-äquivalent (und damit speziell nach 4.16 auch nicht schwach failure-äquivalent und nach 4.21 nicht divergent failure-äquivalent):



Beweis:

Die Zustände z_3 und z_5 in T_2 sind nicht stabil, also gilt:

$$\begin{aligned}
 \text{stable failures}(T_2) &= \underbrace{(\{\varepsilon\} \times \mathcal{P}(\text{Vis} \setminus \{a\}))}_{z_1} \\
 &\cup \underbrace{(\{a\} \times \mathcal{P}(\text{Vis} \setminus \{b\}))}_{z_2} \cup \underbrace{(\{ab\} \times \mathcal{P}(\text{Vis}))}_{z_3 \text{ bzw. } z_4} \\
 &= \text{stable failures}(T_1)
 \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt aber $\text{divs}(T_2) = \{abc\omega \mid \omega \in \text{Vis}^*\} \neq \emptyset = \text{divs}(T_1)$ und $abc \in \text{weak traces}(T_2)$, $abc \notin \text{weak traces}(T_1)$, also $T_1 \not\approx_{\text{div}} T_2$ und $T_1 \not\approx_{\text{tr}} T_2$.

BEISPIEL 4.25

Die folgenden Transitionssysteme $T_1, T_2 \in \mathbb{T}$ sind divergent failure-äquivalent, aber weder schwach trace-äquivalent (und damit speziell nach 4.16 auch nicht schwach failure-äquivalent) noch stabil failure-äquivalent:



Beweis:

Offensichtlich gilt $\text{divs}(T_1) = \{a\omega \mid \omega \in \text{Vis}^*\} = \text{divs}(T_2)$ und damit

$$\begin{aligned}
 \Pi_1(\text{div failures}(T_1)) &= (\{\varepsilon\} \times \mathcal{P}(\text{Vis} \setminus \{a\})) \cup (\text{divs}(T_1) \times \mathcal{P}(\text{Vis})) \\
 &= \Pi_1(\text{div failures}(T_2))
 \end{aligned}$$

und $\Pi_2(\text{div failures}(T_1)) = \text{divs}(T_1) = \Pi_2(\text{div failures}(T_2))$, also $T_1 \approx_{\text{df}} T_2$.

Es gilt aber $ab \in \text{weak traces}(T_1)$, $ab \notin \text{weak traces}(T_2)$ und

$(ab, \emptyset) \in \text{stable failures}(T_1)$, $(ab, \emptyset) \notin \text{stable failures}(T_2)$,

also $T_1 \not\approx_{\text{tr}} T_2$ und $T_1 \not\approx_{\text{f}} T_2$.

BEISPIEL 4.26

Die folgenden Transitionssysteme $T_1, T_2 \in \mathbb{T}$ sind schwach failure-äquivalent (sogar beobachtungskongruent), aber weder stabil failure-äquivalent noch Divergenz-äquivalent (und damit speziell nach 4.21 auch nicht divergent failure-äquivalent):



Beweis:

Es gilt:

$$\begin{aligned} \text{fails}(T_1) &= \underbrace{(\{\varepsilon\} \times \mathcal{P}(\text{Vis} \setminus \{a\}))}_{z_1} \\ &\cup \underbrace{(\{a\} \times \mathcal{P}(\text{Vis} \setminus \{b\}))}_{z_2} \cup \underbrace{(\{ab\} \times \mathcal{P}(\text{Vis}))}_{z_3} \\ &= \text{fails}(T_2) \end{aligned}$$

also $T_1 \approx_{wf} T_2$.

$B := \{(z_1, z_1), (z_2, z_2), (z_3, z_3)\}$ ist offensichtlich eine schwache Bisimulation, und da z_1 in beiden Systemen jeweils stabil ist, gilt mit 2.16 auch $T_1 \approx_+ T_2$.

Offensichtlich gilt aber $\text{divs}(T_2) = \{ab\omega \mid \omega \in \text{Vis}^*\} \neq \emptyset = \text{divs}(T_1)$,

also $T_1 \not\approx_{div} T_2$, und da z_3 in T_2 nicht stabil ist, gilt:

$(ab, \emptyset) \in \text{stable failures}(T_1)$, $(ab, \emptyset) \notin \text{stable failures}(T_2)$, also $T_1 \not\approx_f T_2$.

SATZ 4.27

Es seien $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ Transitionssysteme mit $T_1 \approx_{\uparrow} T_2$.

Dann gilt $T_1 \approx_f T_2$.

Beweis:

Es existiert eine divergente Bisimulation B für $T_1 \approx_{\uparrow} T_2$.

Es sei $(\omega, X) \in \text{stable failures}(T_1)$, also $z_1 \xrightarrow{\omega}_1 r_1 \in S_1$, $r_1 \not\xrightarrow{\alpha}_1 \forall \alpha \in X \cup \{\tau\}$, und speziell gilt damit $r_1 \uparrow$.

Wegen $T_1 \approx_{\uparrow} T_2$ existiert ein $r_2 \in S_2$ mit $z_2 \xrightarrow{\omega}_2 r_2$, $(r_1, r_2) \in B$, $r_2 \uparrow$.

Wegen $r_2 \uparrow$ existieren $n \in \mathbb{N}_0$, $r'_2 \in S_2$ mit $r_2 \xrightarrow{\tau^n}_2 r'_2 \xrightarrow{\tau}_{2,2}$,

und da r_1 stabil ist, folgt $(r_1, r'_2) \in B$.

Angenommen, es existiert ein $\alpha \in X$ mit $r'_2 \xrightarrow{\alpha}_2 r''_2 \in S_2$, dann existiert auch ein $r''_1 \in S_1$ mit $r_1 \xrightarrow{\alpha}_1 r''_1$, und da r_1 stabil ist, folgt $r_1 \not\xrightarrow{\alpha}_1$. \nmid

Aus Symmetriegründen folgt $T_1 \approx_f T_2$. //

BEISPIEL 4.28

Die Transitionssysteme $T_1, T_2 \in \mathbb{T}$ aus Beispiel 4.4 sind stark trace-äquivalent, sie erfüllen aber keine schwache Form der Failure-Äquivalenz:

**Beweis:**

Aus Beispiel 4.4 folgt bereits: $T_1 \sim_{tr} T_2$.

Analog zur Betrachtung in 4.4 gilt $(a, \{c\}) \in \text{fails}(T_2)$ und $(a, \{c\}) \notin \text{fails}(T_1)$ und damit $T_1 \not\approx_{wf} T_2$.

Da die Transitionssysteme divergenzfrei sind, gilt mit 4.23 sofort auch

$T_1 \not\approx_f T_2$ und $T_1 \not\approx_{df} T_2$.

BEISPIEL 4.29

Die folgenden Transitionssysteme $T_1, T_2 \in \mathbf{T}$ sind stark failure-äquivalent, aber nicht schwach failure-äquivalent:



Beweis:

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 \text{strong failures}(T_1) &= \underbrace{\left(\{\varepsilon\} \times \mathcal{P}(\text{Act} \setminus \{a\}) \right)}_{z_1} \cup \underbrace{\left(\{a\tau^k \mid k \in \mathbb{N}_0\} \times \mathcal{P}(\text{Act} \setminus \{\tau\}) \right)}_{z_2, z_3 \text{ bzw. } z_4} \\
 &\quad \cup \underbrace{\left(\{a\tau^k \mid k \in \mathbb{N}\} \times \mathcal{P}(\text{Act} \setminus \{b\}) \right)}_{z_3} \cup \underbrace{\left(\{a\tau^k b \mid k \in \mathbb{N}\} \times \mathcal{P}(\text{Act}) \right)}_{z_4} \\
 &= \text{strong failures}(T_2)
 \end{aligned}$$

und damit $T_1 \sim_f T_2$.

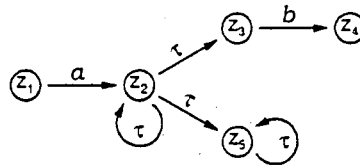
Wegen $z_1 \xrightarrow{a}_1 z_2$, $z_2 \not\xrightarrow{a}_1 z_3$, $z_2 \not\xrightarrow{a}_1 z_4$ gilt aber $(a, \{b\}) \in \text{weak failures}(T_1)$, während $z_1 \xrightarrow{a}_2 s \in S_2$ impliziert $s = z_2$ oder $s = z_3$ und damit $s \xrightarrow{b}_2$.

Also gilt $(a, \{b\}) \notin \text{weak failures}(T_2)$ und damit $T_1 \not\sim_{wf} T_2$.

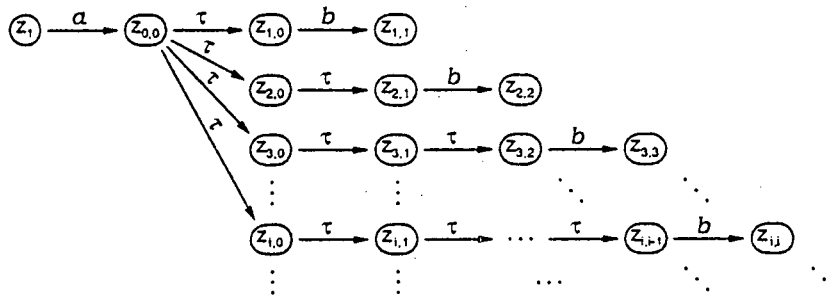
BEISPIEL 4.30

Die folgenden Transitionssysteme sind stark failure-äquivalent, aber nicht divergenz-äquivalent (und damit nach 4.21 auch nicht divergent failure-äquivalent).

Es sei T_1 :



und T_2 das unendlich verzweigende Transitionssystem aus Beispiel 3.24:



Beweis:

Die starken Failures sind:

$$\begin{aligned}
\text{strong failures}(T_1) &= \underbrace{(\{\varepsilon\} \times \mathcal{P}(\text{Act} \setminus \{a\}))}_{z_1} \\
&\cup \underbrace{(\{\{a\tau^k \mid k \in \mathbb{N}_0\} \times \mathcal{P}(\text{Act} \setminus \{\tau\})\}}_{z_2, z_3} \\
&\cup \underbrace{(\{\{a\tau^k \mid k \in \mathbb{N}\} \times \mathcal{P}(\text{Act} \setminus \{b\})\}}_{z_3} \\
&\cup \underbrace{(\{\{a\tau^k b \mid k \in \mathbb{N}\} \times \mathcal{P}(\text{Act})\}}_{z_4}
\end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned}
\text{strong failures}(T_2) &= \underbrace{(\{\varepsilon\} \times \mathcal{P}(\text{Act} \setminus \{a\}))}_{z_1} \\
&\cup \underbrace{(\{\{a\tau^k \mid k \in \mathbb{N}_0\} \times \mathcal{P}(\text{Act} \setminus \{\tau\})\}}_{z_{00}, z_{i,j} \text{ } j \leq i-2} \\
&\cup \underbrace{(\{\{a\tau^k \mid k \in \mathbb{N}\} \times \mathcal{P}(\text{Act} \setminus \{b\})\}}_{z_{i,i-1}} \\
&\cup \underbrace{(\{\{a\tau^k b \mid k \in \mathbb{N}\} \times \mathcal{P}(\text{Act})\}}_{z_{i,i}}
\end{aligned}$$

Damit gilt $\text{strong failures}(T_1) = \text{strong failures}(T_2)$, also $T_1 \sim_f T_2$.

Offensichtlich gilt aber $\text{divs}(T_1) = \{a\omega \mid \omega \in \text{Vis}^*\} \neq \emptyset = \text{divs}(T_2)$

und damit $T_1 \neq_{\text{div}} T_2$.

SATZ 4.31

Es seien $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ endlich verzweigende Transitionssysteme mit $T_1 \sim_f T_2$. Dann gilt $T_1 \approx_{df} T_2$.

Beweis:

Wegen $T_1 \sim_{tr} T_2$ mit Satz 4.7 gilt bereits $\text{divs}(T_1) = \text{divs}(T_2)$ nach Lemma 3.26.

Sei also $(\omega, X) \in \Pi_1(\text{div failures}(T_1))$

Fall 1) $\omega \in \text{divs}(T_1)$

Dann gilt sofort $\omega \in \text{divs}(T_2)$, also $(\omega, X) \in \text{divs}(T_2) \times \mathcal{P}(\text{Vis})$

und damit $(\omega, X) \in \Pi_1(\text{div failures}(T_2))$.

Fall 2) $\omega \notin \text{divs}(T_1)$

Dann gilt $(\omega, X) \in \text{fails}(T_1)$, also existiert ein $r_1 \in S_1$ mit

$z_1 \xrightarrow{\omega} r_1, r_1 \not\xrightarrow{\alpha} \forall \alpha \in X$, und es existiert ein $v \in \text{Act}^*$ mit $\omega = v \setminus \tau, z_1 \xrightarrow{v} r_1$.

Wegen $\omega \notin \text{divs}(T_1)$ gilt $r_1 \nmid \tau$, also existiert ein $k \in \mathbb{N}_0$ und ein $r'_1 \in S_1$

mit $r_1 \xrightarrow{\tau^k} r'_1, r'_1 \nmid \tau$.

Mit $\bar{v} := v\tau^k$ gilt also $(\bar{v}, X \cup \{\tau\}) \in \text{strong failures}(T_1) = \text{strong failures}(T_2)$.

Damit existiert $r_2 \in S_2$ mit $z_2 \xrightarrow{\bar{v}} r_2, r_2 \not\xrightarrow{\alpha} \forall \alpha \in X \cup \{\tau\}$,

also speziell $r_2 \not\xrightarrow{\tau} \tau$, und wegen $\bar{v} \setminus \tau = v \setminus \tau = \omega$ gilt $(\omega, X) \in \text{fails}(T_2)$,

also $(\omega, X) \in \Pi_1(\text{div failures}(T_2))$.

Aus Symmetriegründen folgt $T_1 \approx_{df} T_2$. //

§5 Test-Äquivalenzen

Da zwei der definierten schwachen Failure-Äquivalenzen im allgemeinen Fall nicht die schwache Trace-Äquivalenz implizieren, erhält man weitere Äquivalenzrelationen durch die Kombination der beiden Forderungen.

DEFINITION 5.1

vgl. [Taubner]

Zwei Transitionssysteme $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ heißen *divergent test-äquivalent* (geschrieben $T_1 \approx_{dtest} T_2$)¹, wenn gilt: $T_1 \approx_{tr} T_2 \wedge T_1 \approx_{df} T_2$.

BEISPIEL 5.2

Die folgenden Transitionssysteme $T_1, T_2 \in \mathbb{T}$ sind divergent test-äquivalent, aber weder schwach failure-äquivalent noch stabil failure-äquivalent:



Beweis:

Offensichtlich gilt $weak\ traces(T_1) = \{\varepsilon, a, ab\} = weak\ traces(T_2)$ und
 $divs(T_1) = \{a\omega \mid \omega \in Vis^*\} = divs(T_2) = \Pi_2(div\ failures(T_1))$
 $= \Pi_2(div\ failures(T_2))$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} \Pi_1(div\ failures(T_1)) &= \underbrace{(\{\varepsilon\} \times \mathcal{P}(Vis \setminus \{a\}))}_{z_1} \cup \underbrace{(\{a\omega \mid \omega \in Vis^*\} \times \mathcal{P}(Vis))}_{z_2} \\ &= \Pi_1(div\ failures(T_2)) \end{aligned}$$

und damit insgesamt $T_1 \approx_{dtest} T_2$.

Da z_2 in T_1 nicht stabil ist, gilt $(a, \{b\}) \notin stable\ failures(T_1)$, aber wegen Zustand z_4 in T_2 gilt $(a, \{b\}) \in stable\ failures(T_2)$, also $T_1 \neq_f T_2$.

Die Betrachtung derselben Zustände liefert auch sofort:

$(a, \{b\}) \notin fails(T_1)$ und $(a, \{b\}) \in fails(T_2)$, also $T_1 \neq_{wf} T_2$.

KOROLLAR 5.3

[Taubner]

Es seien $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ Transitionssysteme mit $T_1 \approx_{\uparrow} T_2$. Dann gilt $T_1 \approx_{dtest} T_2$.

Beweis:

[Taubner]

Nach Satz 4.20 gilt $T_1 \approx_{df} T_2$,

und nach Satz 3.18 und Lemma 3.8 folgt $T_1 \approx_{tr} T_2$. //

¹ [Taubner] definiert divergent test-äquivalent als „test-äquivalent“

KOROLLAR 5.4

Es seien $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ endlich verzweigende Transitionssysteme mit $T_1 \sim_f T_2$. Dann gilt $T_1 \approx_{dtest} T_2$.

Beweis:

Nach Satz 4.31 gilt $T_1 \approx_{df} T_2$, und nach Satz 4.7 und Satz 3.9 folgt $T_1 \approx_{tr} T_2$. //

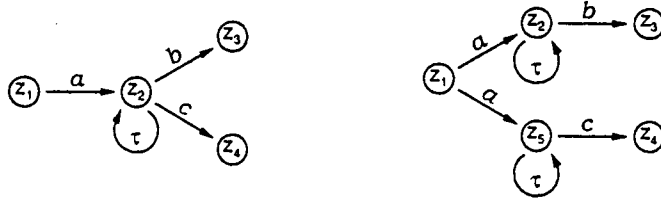
Da die stabile Failure-Äquivalenz von [Milner] im allgemeinen Fall ebenfalls nicht die schwache Trace-Äquivalenz impliziert, ist es möglich, eine analoge Test-Äquivalenz zu definieren, die sich in der Tat von [Taubner] unterscheidet.

DEFINITION 5.5

Zwei Transitionssysteme $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ heißen *stabil test-äquivalent* (geschrieben $T_1 \approx_{ftest} T_2$), wenn gilt: $T_1 \approx_{tr} T_2 \wedge T_1 \approx_f T_2$.

BEISPIEL 5.6

Die folgenden Transitionssysteme $T_1, T_2 \in \mathbb{T}$ sind stabil test-äquivalent, aber nicht schwach failure-äquivalent:



Beweis:

Offensichtlich gilt $weak\ traces(T_1) = \{\epsilon, a, ab, ac\} = weak\ traces(T_2)$.

Da die Zustände z_2 in T_1 und z_5 in T_2 jeweils nicht stabil sind, gilt:

$$\begin{aligned} stable\ failures(T_1) &= \underbrace{(\{\epsilon\} \times \mathcal{P}(Vis \setminus \{a\}))}_{z_1} \cup \underbrace{(\{ab\} \times \mathcal{P}(Vis))}_{z_3} \cup \underbrace{(\{ac\} \times \mathcal{P}(Vis))}_{z_4} \\ &= stable\ failures(T_2) \end{aligned}$$

und damit $T_1 \approx_{ftest} T_2$.

Andererseits gilt wegen der Zustände z_2 in T_1 und in T_2 unmittelbar $(a, \{c\}) \notin fails(T_1)$ und $(a, \{c\}) \in fails(T_2)$, also $T_1 \neq_{wf} T_2$.

BEISPIEL 5.7

Die folgenden Transitionssysteme $T_1, T_2 \in \mathbb{T}$ sind stabil test-äquivalent, aber nicht divergenz-äquivalent (und damit auch nicht divergent failure-äquivalent):



Beweis:

Offensichtlich gilt sofort $weak\ traces(T_1) = \{\varepsilon, a, ab\} = weak\ traces(T_2)$ und
 $stable\ failures(T_1) = \underbrace{(\{\varepsilon\} \times \mathcal{P}(Vis \setminus \{a\}))}_{z_1}$

$$\cup \underbrace{(\{a\} \times \mathcal{P}(Vis \setminus \{b\}))}_{z_3} \cup \underbrace{(\{ab\} \times \mathcal{P}(Vis))}_{z_4}$$

$$= stable\ failures(T_2)$$

also zusammen $T_1 \approx_{f_{test}} T_2$.

Andererseits gilt $divs(T_1) = \emptyset \neq \{a\omega \mid \omega \in Vis^*\} = divs(T_2)$

und damit sofort $T_1 \not\approx_{div} T_2$.

KOROLLAR 5.8

Es seien $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ Transitionssysteme mit $T_1 \approx_{\uparrow} T_2$.
 Dann gilt $T_1 \approx_{f_{test}} T_2$.

Beweis:

Nach Satz 4.27 gilt $T_1 \approx_f T_2$,

und nach Satz 3.18 und Lemma 3.8 folgt $T_1 \approx_{tr} T_2$. //

KOROLLAR 5.9

Es seien $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ Transitionssysteme mit $T_1 \sim_f T_2$.
 Dann gilt $T_1 \approx_{f_{test}} T_2$.

Beweis:

Nach Satz 4.11 gilt $T_1 \approx_f T_2$, und nach Satz 4.7 und Satz 3.9 folgt $T_1 \approx_{tr} T_2$. //

KOROLLAR 5.10

[Taubner]

Es seien $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ divergenzfreie Transitionssysteme.

Dann gilt $T_1 \approx_{dtest} T_2 \Leftrightarrow T_1 \approx_{f_{test}} T_2 \Leftrightarrow T_1 \approx_{df} T_2 \Leftrightarrow T_1 \approx_{wf} T_2 \Leftrightarrow T_1 \approx_f T_2$.

Beweis:

[Taubner]

Nach Satz 4.23 gilt bereits $T_1 \approx_{df} T_2 \Leftrightarrow T_1 \approx_{wf} T_2 \Leftrightarrow T_1 \approx_f T_2$.

Aus $T_1 \approx_{wf} T_2$ folgt mit Satz 4.16 $T_1 \approx_{tr} T_2$, also gilt $T_1 \approx_{df} T_2 \Rightarrow T_1 \approx_{dtest} T_2$

und $T_1 \approx_f T_2 \Rightarrow T_1 \approx_{f_{test}} T_2$. Die Umkehrung folgt direkt aus 5.1 und 5.5. //

BEMERKUNG 5.11

Da die starke Failure-Äquivalenz nach Satz 4.7 stets die starke Trace-Äquivalenz und die schwache Failure-Äquivalenz nach Satz 4.16 stets auch die schwache Trace-Äquivalenz impliziert, ergibt die Definition einer starken oder schwachen Test-Äquivalenz keine neue Äquivalenzrelation.

§6 Simulationen

[Milner] betrachtet eine spezielle Variante der Bisimulation, bei der statt beliebiger Transitionen in beiden Komponenten der Relation immer nur Transitionen in einer Komponente betrachtet werden. Die Zustände der Systeme werden also so miteinander identifiziert, daß für jede Transition im ersten System eine gleiche Transition im zweiten System möglich ist (aber nicht notwendigerweise umgekehrt). Das zweite System ist dann eine „Simulation“ für das erste.

Äquivalent sind zwei Systeme dann, wenn beide Systeme jeweils „Simulation“ für das andere sind, wobei die zugehörigen Relationen aber völlig unabhängig voneinander sein dürfen.

DEFINITION 6.1

[Milner]

Es seien $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ Transitionssysteme.

Eine Relation $R \subseteq S_1 \times S_2$ mit $(s_1, s_2) \in R$ heißt *schwache Simulation* für (s_1, s_2) , wenn für alle $(r_1, r_2) \in R$ und $\omega \in \text{Vis}^*$ gilt:

$$r_1 \xrightarrow{\omega}_1 r'_1 \in S_1 \Rightarrow \exists r'_2 \in S_2 \text{ mit } r_2 \xrightarrow{\omega}_2 r'_2 \text{ und } (r'_1, r'_2) \in R$$

Man definiert $T_1 \leq_{\text{sim}} T_2 \Leftrightarrow \exists R$ schwache Simulation für (z_1, z_2) ,

R heißt dann schwache Simulation für $T_1 \leq_{\text{sim}} T_2$, und man schreibt auch $T_1 \stackrel{R}{\leq}_{\text{sim}} T_2$.

DEFINITION 6.2

[Milner]

Es seien $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ Transitionssysteme.

T_1 und T_2 heißen *schwach similar* (geschrieben $T_1 \approx_{\text{sim}} T_2$),

wenn gilt: $T_1 \leq_{\text{sim}} T_2 \wedge T_2 \leq_{\text{sim}} T_1$.

Diese Definitionen lassen sich in natürlicher Weise in starke Varianten übertragen:

DEFINITION 6.3

Es seien $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ Transitionssysteme.

Eine Relation $R \subseteq S_1 \times S_2$ mit $(s_1, s_2) \in R$ heißt *starke Simulation* für (s_1, s_2) , wenn für alle $(r_1, r_2) \in R$ und $\alpha \in \text{Act}$ gilt:

$$r_1 \xrightarrow{\alpha}_1 r'_1 \in S_1 \Rightarrow \exists r'_2 \in S_2 \text{ mit } r_2 \xrightarrow{\alpha}_2 r'_2 \text{ und } (r'_1, r'_2) \in R$$

Man definiert $T_1 <_{\text{sim}} T_2 \Leftrightarrow \exists R$ starke Simulation für (z_1, z_2) ,

R heißt dann starke Simulation für $T_1 <_{\text{sim}} T_2$, und man schreibt auch $T_1 \stackrel{R}{<}_{\text{sim}} T_2$.

DEFINITION 6.4

Es seien $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ Transitionssysteme.

T_1 und T_2 heißen *stark similar* (geschrieben $T_1 \sim_{\text{sim}} T_2$),

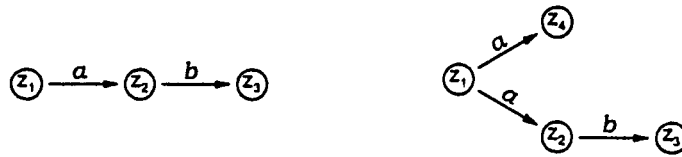
wenn gilt: $T_1 <_{\text{sim}} T_2 \wedge T_2 <_{\text{sim}} T_1$.

BEMERKUNG 6.5

Lemma 2.3 gilt offensichtlich in analoger Weise auch für starke Simulationen.

BEISPIEL 6.6

Die folgenden Transitionssysteme $T_1, T_2 \in \mathbb{T}$ sind stark simulär, aber nicht schwach failure-äquivalent (und damit auch nicht test-äquivalent oder bisimulär):



Beweis:

$R := \{(z_1, z_1), (z_2, z_2), (z_3, z_3)\}$ ist offensichtlich starke Simulation für $T_1 \stackrel{R}{\leq}_{sim} T_2$,
 und $R' := \{(z_1, z_1), (z_2, z_2), (z_3, z_3), (z_4, z_2)\}$ ist starke Simulation für $T_2 \stackrel{R'}{\leq}_{sim} T_1$,
 es gilt also $T_1 \sim_{sim} T_2$.

Wegen $z_1 \xrightarrow{a}_2 z_4$, $z_4 \not\xrightarrow{a}_2 \forall \alpha \in Vis$ gilt $(a, \{b\}) \in weak\ fails(T_2)$,
 aber $(a, \{b\}) \notin weak\ fails(T_1)$, also $T_1 \neq_{wf} T_2$.

Da beide Transitionssysteme divergenzfrei sind, gilt sofort auch $T_1 \neq_f T_2$
 und $T_1 \neq_{df} T_2$.

BEISPIEL 6.7

Die folgenden Transitionssysteme $T_1, T_2 \in \mathbb{T}$ aus Beispiel 4.5 sind stark failure-äquivalent, aber nicht schwach simulär:



Beweis:

Nach Beispiel 4.5 gilt $T_1 \sim_f T_2$.

Angenommen, es existiert $R \subseteq S_1 \times S_2$, $T_1 \stackrel{R}{\leq}_{sim} T_2$.

Wegen $z_1 \xrightarrow{a}_1 z_2$ muß gelten $(z_2, z_2) \in R$ oder $(z_2, z_7) \in R$.

Fall 1) $(z_2, z_2) \in R$

Wegen $z_2 \xrightarrow{dc}_1 z_6$ muß gelten $z_2 \xrightarrow{dc}_2 \text{?}$

Fall 2) $(z_2, z_7) \in R$

Wegen $z_2 \xrightarrow{db}_1 z_4$ muß gelten $z_7 \xrightarrow{db}_2 \text{?}$

SATZ 6.8

Es seien $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ Transitionssysteme mit $T_1 \approx T_2$.

Dann gilt $T_1 \approx_{sim} T_2$.

Beweis:

Es gilt $T_1 \stackrel{B}{\approx} T_2$ für eine schwache Bisimulation $B \subseteq S_1 \times S_2$.

Dann ist offensichtlich B schwache Simulation für $T_1 \leq_{sim} T_2$

und B^{-1} schwache Simulation für $T_2 \leq_{sim} T_1$. //

SATZ 6.9

Es seien $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ Transitionssysteme mit $T_1 \sim T_2$.
Dann gilt $T_1 \sim_{sim} T_2$.

Beweis:

Es gilt $T_1 \stackrel{B}{\sim} T_2$ für eine starke Bisimulation $B \subseteq S_1 \times S_2$.

Dann ist offensichtlich B starke Simulation für $T_1 <_{sim} T_2$

und B^{-1} starke Simulation für $T_2 <_{sim} T_1$. //

SATZ 6.10

Es seien $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ Transitionssysteme mit $T_1 \sim_{sim} T_2$.
Dann gilt $T_1 \approx_{sim} T_2$.

Beweis:

Analog zum Beweis in Lemma 2.12 ist jede starke Simulation
auch eine schwache Simulation. //

SATZ 6.11

Es seien $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ Transitionssysteme mit $T_1 \approx_{sim} T_2$.
Dann gilt $T_1 \approx_{tr} T_2$.

Beweis:

Es existieren schwache Simulationen $T_1 \stackrel{B}{\leq}_{sim} T_2$ und $T_2 \stackrel{B'}{\leq}_{sim} T_1$.

Der Beweis folgt analog dem Beweis von Lemma 3.8 mit R statt B
und R' statt B^{-1} . //

SATZ 6.12

Es seien $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ Transitionssysteme mit $T_1 \sim_{sim} T_2$.
Dann gilt $T_1 \sim_{tr} T_2$.

Beweis:

Es existieren starke Simulationen $T_1 \stackrel{R}{\leq}_{sim} T_2$ und $T_2 \stackrel{R'}{\leq}_{sim} T_1$.

Der Beweis folgt analog dem Beweis von Lemma 3.4 mit R statt B
und R' statt B^{-1} . //

LEMMA 6.13

vgl. [Taubner]

Es seien $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ Transitionssysteme mit $T_1 \stackrel{R}{\leq}_{sim} T_2$.
Dann gilt für alle $(r_1, r_2) \in R$: $r_1 \uparrow \Rightarrow r_2 \uparrow$.

Beweis:

Analog Lemma 3.20 mit R statt B . //

LEMMA 6.14

vgl. [Taubner]

Es seien $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ Transitionssysteme mit $T_1 \stackrel{R}{\leq}_{sim} T_2$.
Dann gilt $\text{divs}(T_1) \subseteq \text{divs}(T_2)$.

Beweis:

Analog Lemma 3.22 mit R statt B . //

SATZ 6.15

Es seien $T_1 = (S_1, D_1, z_1)$ und $T_2 = (S_2, D_2, z_2)$ Transitionssysteme mit $T_1 \sim_{sim} T_2$.
Dann gilt $T_1 \approx_{div} T_2$.

Beweis:

Nach Satz 6.12 und Satz 3.9 gilt bereits $weak\ traces(T_1) = weak\ traces(T_2)$.

Es existieren starke Simulationen $T_1 \stackrel{R}{\sim}_{sim} T_2$ und $T_2 \stackrel{R'}{\sim}_{sim} T_1$.

Nach Lemma 6.14 gilt also $divs(T_1) = divs(T_2)$ und damit $T_1 \approx_{div} T_2$. //

SATZ 6.16

Die Relationen \sim_{sim} und \approx_{sim} sind Äquivalenzrelationen.

Beweis:

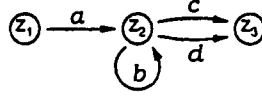
Die Reflexivität folgt in analoger Weise wie in Lemma 2.4 i)
und die Transitivität wie in 2.4 iii).

Die Symmetrie folgt unmittelbar aus den Definitionen 6.2 und 6.4. //

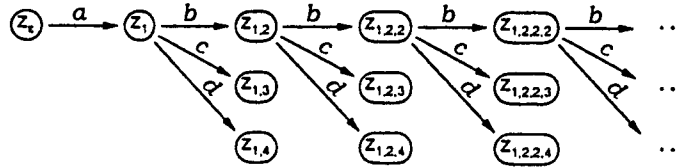
§7 Bäume

BEISPIEL 7.1

Man betrachte das folgende Transitionssystem $T = (S, D, z_1)$ mit $D = (d_1, d_2, d_3, d_4)$ und $d_1 = (z_1, a, z_2)$, $d_2 = (z_2, b, z_2)$, $d_3 = (z_2, c, z_3)$, $d_4 = (z_2, d, z_3)$:



Es handelt sich offensichtlich nicht um einen Baum, tatsächlich kann man es aber in natürlicher Weise in einen Baum $T' = (S', D', z_\varepsilon)$ umwandeln, indem man, beginnend mit dem Startzustand z_1 , alle zulässigen Folgen von Transitionen „abwickelt“:



Dieses „abgewinkelte“ Transitionssystem benötigt soviele Zustände (Knoten), wie es ausführbare Folgen von Transitionen $\delta_1 \delta_2 \dots \delta_n \in D^*$, $n \in \mathbb{N}_0$ in T gibt, hier dargestellt durch Indexfolgen der Elemente aus $D = (d_1, d_2, d_3, d_4)$.

DEFINITION 7.2

vgl. [Baier]

Es sei $T = (S, D, z)$ ein Transitionssystem. Man definiert $tree(T) = (S', D', z')$ und eine Relation $B \subseteq S' \times S$ durch:

- i) $S' := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} S_n \subseteq \{s_\beta \mid \beta \in D^*\}$
- ii) $D' := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} D_n \subseteq S' \times Act \times S'$
- iii) $z' := s_\varepsilon \in S'$
- iv) $B := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} B_n$

Die Mengen S_n, D_n, B_n für $n \in \mathbb{N}_0$ werden rekursiv definiert:

$n = 0$)

$$S_0 := \{s_\varepsilon\}, D_0 := \emptyset, B_0 := \{(s_\varepsilon, z)\}$$

dann gilt speziell: $B_0: S_0 \rightarrow S$ ist eine wohldefinierte Funktion.

$n - 1 \rightarrow n$)

Die Mengen $S_{n-1}, D_{n-1}, B_{n-1}$ sind bereits definiert,

und $B_{n-1}: S_{n-1} \rightarrow S$ ist eine wohldefinierte Funktion.

Die Elemente $s \in S_{n-1}$ haben die Form $s = s_{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_{n-1}}$, $\delta_i \in D \forall i$.

Man definiert die Index-Menge:

$$M_n := \{(s, \delta, \alpha, r) \mid s = s_{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_{n-1}} \in S_{n-1}, \delta = (B_{n-1}(s), \alpha, r) \in D\}$$

und damit die Mengen S_n, D_n, B_n :

$$\begin{aligned}
S_n &:= \bigcup_{(s, \delta, \alpha, r) \in M_n} \{s_{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_{n-1} \delta} \mid s = s_{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_{n-1} \delta}\} \\
D_n &:= \bigcup_{(s, \delta, \alpha, r) \in M_n} \{(s, \alpha, s_{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_{n-1} \delta}) \mid s = s_{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_{n-1} \delta}\} \\
B_n &:= \bigcup_{(s, \delta, \alpha, r) \in M_n} \{(s_{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_{n-1} \delta}, r) \mid s = s_{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_{n-1} \delta}\}
\end{aligned}$$

Durch die Definition von M_n ist klar, daß die Elemente $s \in S_n$ wieder die oben gewünschte Form haben und $B_n: S_n \rightarrow S$ wieder eine wohldefinierte Funktion ist.

BEMERKUNG 7.3

Der in Definition 7.2 definierte Baum $tree(T) = (S', D', z')$ soll im folgenden als Transitionssystem $tree(T) \in \mathbb{T}$ aufgefaßt werden.

Da eingangs vorausgesetzt wurde, daß alle Zustandsmengen S aus Transitionssystemen $T = (S, D, z)$ Teilmengen einer festen Grundmenge sein sollen, wird die Menge $\{s_\beta \mid \beta \in D^*\}$ als eine geeignete Teilmenge dieser Grundmenge betrachtet. Damit gilt direkt $tree(T) = (S', D', z') \in \mathbb{T}$.

BEMERKUNG 7.4

Aus der Konstruktion in Definition 7.2 folgt unmittelbar, daß das konstruierte Transitionssystem $tree(T)$ Baumstruktur mit der Wurzel $z' = s_e$ hat.

SATZ 7.5

vgl. [Baier]

Es sei $T = (S, D, z)$ ein Transitionssystem und $tree(T) = (S', D', z')$.

Dann ist die Relation $B \subseteq S' \times S$ aus 7.2 eine starke Bisimulation für $tree(T) \stackrel{B}{\sim} T$.

Beweis:

Nach der Konstruktion in 7.2 gilt sofort $(z', z) = (s_e, z) \in B_0 \subseteq B$.

Es sei nun $(s, p) \in B$ beliebig. Nach Konstruktion gilt $s = s_{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_n}$ für genau ein $n \in \mathbb{N}_0$, und damit gilt $s \in S_n$ und $(s, p) \in B_n$ für genau dieses $n \in \mathbb{N}_0$.

i) Es gelte $s \xrightarrow{\alpha} \bar{s}$, also $(s, \alpha, \bar{s}) \in D'$:

Dann gilt nach Konstruktion $(s, \alpha, \bar{s}) \in D_{n+1}$,

es existiert also ein $(s, \delta, \alpha, r) \in M_{n+1}$ mit $\delta = (B_n(s), \alpha, r) = (p, \alpha, r) \in D$.

Daraus folgt $p \xrightarrow{\alpha} r$ und $(\bar{s}, r) = (s_{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_n \delta}, r) \in B_{n+1} \subseteq B$. //

ii) Es gelte $p \xrightarrow{\alpha} r$, also $(p, \alpha, r) \in D$:

Wegen $B_n(s) = p$ gilt sofort $\delta = (B_n(s), \alpha, r) \in D$, also $(s, \delta, \alpha, r) \in M_{n+1}$

und damit $(s, \alpha, \bar{s}) := (s, \alpha, s_{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_n \delta}) \in D_{n+1} \subseteq D'$.

Also gilt $s \xrightarrow{\alpha} \bar{s}$ und $(\bar{s}, r) = (s_{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_n \delta}, r) \in B_{n+1} \subseteq B$. //

KOROLLAR 7.6

Es seien $T_1, T_2 \in \mathbb{T}$ Transitionssysteme mit $T_1 =_x T_2$, wobei $=_x$ starke, schwache oder divergente Bisimulation, Beobachtungskongruenz, starke oder schwache Trace-Äquivalenz, Divergenz-Äquivalenz, starke oder eine der drei schwachen Failure-Äquivalenzen, eine der beiden Test-Äquivalenzen oder starke oder schwache Simulation ist.

Dann gilt $T_1 =_x T_2 \Leftrightarrow tree(T_1) =_x tree(T_2)$.

Beweis:

Nach Satz 7.5 gilt $tree(T_1) \sim T_1$ und $tree(T_2) \sim T_2$.

Mit den Sätzen 2.12, 3.21, 2.13, 3.4, 3.9, 3.23, 4.6, 4.11, 4.15, 4.20, 5.3, 5.8, 6.8 und 6.9 folgt daraus $tree(T_1) =_x T_1$ und $tree(T_2) =_x T_2$.

Also gilt:

$$T_1 =_x T_2 \Rightarrow tree(T_1) =_x T_1 =_x T_2 =_x tree(T_2)$$

und:

$$tree(T_1) =_x tree(T_2) \Rightarrow T_1 =_x tree(T_1) =_x tree(T_2) =_x T_2. //$$

§8 Zusammenfassung

ÜBERSICHT 8.1

Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über die definierten Äquivalenzrelationen und deren Bezeichnungen.

\equiv	Isomorphie	Definition 1.14
\sim	starke Bisimulation	Definition 2.1
\approx_+	Beobachtungskongruenz	Definition 2.8
\approx	schwache Bisimulation	Definition 2.5
\approx_\uparrow	divergente Bisimulation	Definition 3.17
\sim_{tr}	starke Trace-Äquivalenz	Definition 3.2
\approx_{tr}	schwache Trace-Äquivalenz	Definition 3.6
\approx_{div}	Divergenz-Äquivalenz	Definition 3.13
\sim_f	starke Failure-Äquivalenz	Definition 4.3
\approx_f	stabile Failure-Äquivalenz	Definition 4.10
\approx_{df}	divergente Failure-Äquivalenz	Definition 4.19
\approx_{wf}	schwache Failure-Äquivalenz	Definition 4.14
\approx_{dtest}	divergente Test-Äquivalenz	Definition 5.1
$\approx_{f_{test}}$	stabile Test-Äquivalenz	Definition 5.5
\sim_{sim}	starke Simulation	Definition 6.4
\approx_{sim}	schwache Simulation	Definition 6.2

ÜBERSICHT 8.2

Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über die bewiesenen Implikationen und Gegenbeispiele. Dabei bedeutet „ $=_x \Rightarrow =_y$ “ stets:

$T_1 =_x T_2 \Rightarrow T_1 =_y T_2$ für alle Transitionssysteme $T_1, T_2 \in \mathbb{T}$.

Weiter bedeutet:

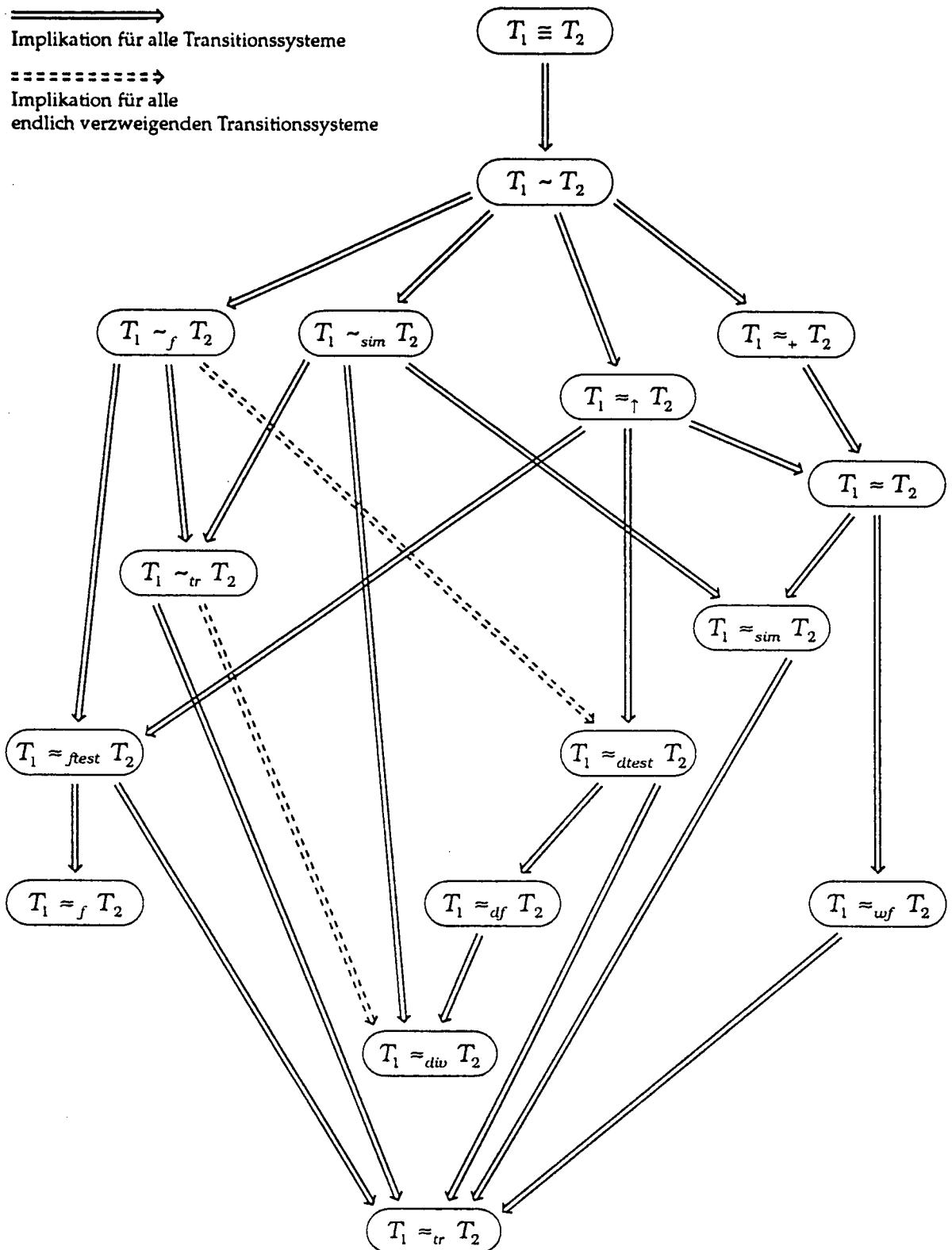
- \Rightarrow Implikation gilt für alle T_1, T_2
- $* \Rightarrow$ Implikation gilt für alle divergenzfreien T_1, T_2 , sonst i.a. nicht
- $** \Rightarrow$ Implikation gilt für alle endlich verzweigenden oder divergenzfreien T_1, T_2 , sonst i.a. nicht
- \neg Implikation gilt auch für endlich verzweigende und divergenzfreie T_1, T_2 i.a. nicht

	\equiv	\sim	\approx_+	\approx	\approx_\uparrow	\sim_{tr}	\approx_{tr}	\approx_{div}	\sim_f	\approx_f	\approx_{df}	\approx_{wf}	\approx_{dtest}	\approx_{ftest}	\sim_{sim}	\approx_{sim}
\equiv	\Leftrightarrow	\Rightarrow 2.11														
\sim	\neg 2.2	\Leftrightarrow	\Rightarrow 2.13	\Rightarrow 2.12	\Rightarrow 3.21	\Rightarrow 3.4		\Rightarrow 3.21	\Rightarrow 4.6		\Rightarrow 3.21		\Rightarrow 3.21		\Rightarrow 6.9	
\approx_+		\Rightarrow 2.9	\Leftrightarrow	\Rightarrow 2.14		\neg 3.7			\neg 3.7	\Rightarrow 4.23 \Rightarrow 4.26			\Rightarrow 5.10 \Rightarrow 4.26		\neg 3.7	
\approx		\neg 2.6	\neg 2.10	\Leftrightarrow	\Rightarrow 3.18 \Rightarrow 3.16		\Rightarrow 3.8	\Rightarrow 3.14 \Rightarrow 3.16				\Rightarrow 4.15				\Rightarrow 6.8
\approx_\uparrow				\Rightarrow 3.18	\Leftrightarrow	\neg 3.19		\Rightarrow 3.23	\neg 3.19	\Rightarrow 4.27	\Rightarrow 4.20		\Rightarrow 5.3	\Rightarrow 5.8	\neg 3.19	
\sim_{tr}		\neg 3.3				\Leftrightarrow	\Rightarrow 3.9	\Rightarrow 3.27 \Rightarrow 3.24	\neg 4.4	\neg 4.28					\neg 6.7	
\approx_{tr}						\neg 3.7	\Leftrightarrow	\Rightarrow 3.14 \Rightarrow 3.16								
\approx_{div}							\Rightarrow 3.14 \Rightarrow 3.15	\Leftrightarrow								
\sim_f		\neg 4.5				\Rightarrow 4.7		\Rightarrow 4.31 \Rightarrow 4.30	\Leftrightarrow	\Rightarrow 4.11	\Rightarrow 4.31 \Rightarrow 4.30	\Rightarrow 4.23 \Rightarrow 4.29	\Rightarrow 5.4 \Rightarrow 4.30	\Rightarrow 5.9		
\approx_f						\neg 3.7	\Rightarrow 4.23 \Rightarrow 4.24		\neg 3.7	\Leftrightarrow	\Rightarrow 4.23 \Rightarrow 4.24		\Rightarrow 5.10 \Rightarrow 4.24		\neg 6.7	
\approx_{df}							\Rightarrow 3.14 \Rightarrow 4.25	\Rightarrow 4.21		\Rightarrow 4.23 \Rightarrow 4.25	\Leftrightarrow	\Rightarrow 4.23 \Rightarrow 4.25	\Rightarrow 5.10 \Rightarrow 4.25			
\approx_{wf}							\Rightarrow 4.16	\Rightarrow 4.23 \Rightarrow 4.26		\Rightarrow 4.23 \Rightarrow 4.26		\Leftrightarrow	\Rightarrow 5.10 \Rightarrow 4.26			
\approx_{dtest}							\Rightarrow 5.1			\Rightarrow 5.10 \Rightarrow 5.2	\Rightarrow 5.1	\Rightarrow 5.10 \Rightarrow 5.2	\Leftrightarrow	\Rightarrow 5.10 \Rightarrow 5.2		
\approx_{ftest}							\Rightarrow 5.5	\Rightarrow 5.10 \Rightarrow 5.7		\Rightarrow 5.5	\Rightarrow 5.10 \Rightarrow 5.7	\Rightarrow 5.10 \Rightarrow 5.6	\Rightarrow 5.10 \Rightarrow 5.7	\Leftrightarrow		
\sim_{sim}		\neg 6.6				\Rightarrow 6.12		\Rightarrow 6.15	\neg 6.6						\Leftrightarrow	\Rightarrow 6.10
\approx_{sim}						\neg 3.7	\Rightarrow 6.11	\Rightarrow 3.14 \Rightarrow 3.16							\neg 3.7	\Leftrightarrow

Satz- und Beispielnummern in erweiterten Zellen beziehen sich auf alle dort betroffenen Implikationen.
Wenn die Aussage eine transitive Folgerung ist, dann ist die Nummer kursiv gesetzt.

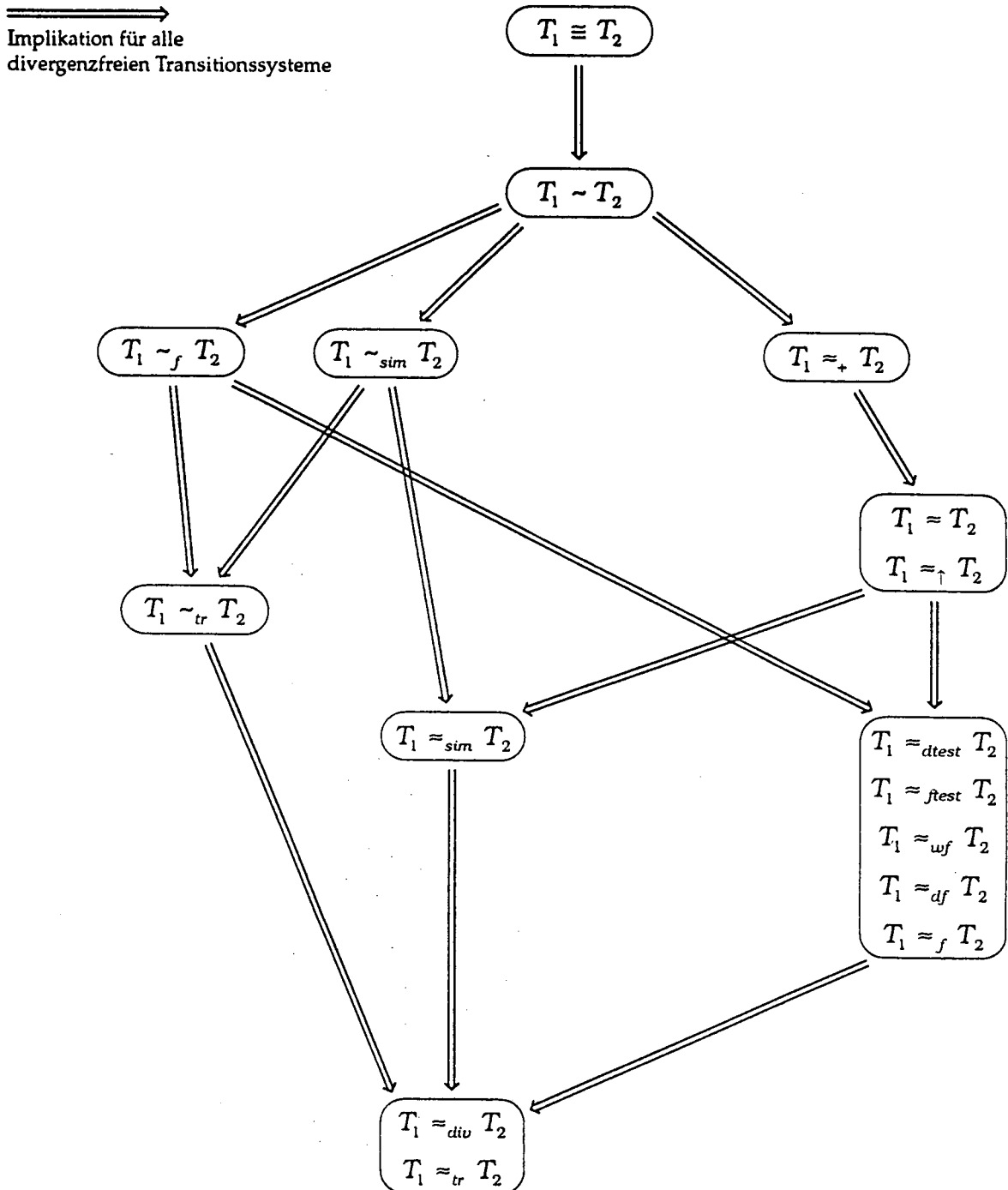
ÜBERSICHT 8.3

Die folgende Graphik gibt eine Übersicht über die Implikationen im allgemeinen Fall.



ÜBERSICHT 8.4

Die folgende Graphik gibt eine Übersicht über die Implikationen im divergenzfreien Spezialfall (gemeinsam umrahmte Ausdrücke sind äquivalent):



Teil II. Ereignisstrukturen

§9 Definitionen, Isomorphie

DEFINITION 9.1

[Gla/Go]

Eine Ereignisstruktur¹ ist ein Quadrupel $\mathcal{E} = (E, <, \#, l)$, wobei

- E eine Menge von Ereignissen²
- $<$ eine irreflexive Relation (die *Flußrelation*)
- $\#$ eine symmetrische Relation (die *Konfliktrelation*)
- l eine Funktion $l: E \rightarrow \text{Act}$ (die *Markierungsfunktion*)

ist.

Die Menge aller Ereignisstrukturen heißt \mathbb{E} .

BEISPIEL 9.2

Das folgende Quadrupel ist eine Ereignisstruktur:

$\mathcal{E} = (E, <, \#, l)$ mit

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

$< = \{(e_1, e_3), (e_2, e_3), (e_4, e_3)\}$

$\# = \{(e_1, e_2), (e_2, e_1)\}$

$l = \{(e_1, a), (e_2, b), (e_3, c), (e_4, \tau)\}$

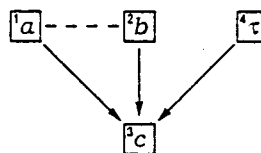
In der Regel werden Ereignisstrukturen graphisch in der folgenden Form wiedergegeben:

- i) Ereignisse e werden als Quadrate mit der Aktion $l(e)$ als Inhalt dargestellt.
- ii) Eine Flußrelation $d < e$ wird als Pfeil „ \longrightarrow “ dargestellt.
- iii) Eine Konfliktrelation $d \# e$ wird als gestrichelte Linie „ $- - -$ “ dargestellt.

Auf diese Weise werden Ereignisstrukturen bis auf Isomorphie beschrieben.

In dieser Arbeit werden zur genaueren Veranschaulichung der Beispiele zusätzlich die Quadrate noch mit den Indizes der Ereignisse markiert.

Die oben definierte Ereignisstruktur wird also durch folgende Graphik dargestellt:



BEMERKUNG 9.3

Eine Ereignisstruktur $\mathcal{E} = (E, <, \#, l)$ wird als System interpretiert, das Aktionen $\alpha \in \text{Act}$ ausführen kann, indem ein Ereignis $e \in E$ eintritt, das mit der Aktion $\alpha = l(e)$ markiert ist. Die möglichen Zustände des Systems werden damit von den möglichen Mengen $X \subseteq E$ von Ereignissen (die zu einem bestimmten Zeitpunkt eingetreten sind) bestimmt, sogenannte Konfigurationen.

¹ Eigentlich „Fluß-Ereignisstruktur“ (englisch *flow-eventstructure*)

² Es wird wieder unterstellt, daß E immer Teilmenge einer beliebigen, aber festen Grundmenge ist, so daß die Menge der Ereignisstrukturen wohldefiniert ist.

Ereignisse $d, e \in E$, die in Konflikt $d \# e$ stehen, können grundsätzlich nie gleichzeitig Elemente einer Konfiguration sein. Besteht eine Flußrelation $d \prec e$, dann ist d eine mögliche direkte Voraussetzung von e . Das Ereignis e kann nur dann Element einer Konfiguration sein, wenn sie auch d als Element enthält, außer sie enthält eine andere mögliche direkte Voraussetzung $f \prec e$, die mit d in Konflikt $f \# d$ steht. Die Konfiguration muß also eine maximale konfliktfreie Menge von möglichen direkten Voraussetzungen von e enthalten.

DEFINITION 9.4

[Gla/Go]

Es sei $\mathcal{E} = (E, \prec, \#, 1)$ eine Ereignisstruktur.

Eine Menge $X \subseteq E$ heißt *linksabgeschlossen bis auf Konflikte* (in \mathcal{E}),

wenn für alle $d, e \in E$ mit $e \in X$, $d \prec e$ und $d \notin X$ folgt: $\exists f \in X$, $f \prec e$ mit $f \# d$.

X heißt *konfliktfrei* (in \mathcal{E}), wenn $\# \cap (X \times X) = \emptyset$ gilt.

DEFINITION 9.5

[Gla/Go]

Es sei $\mathcal{E} = (E, \prec, \#, 1)$ eine Ereignisstruktur.

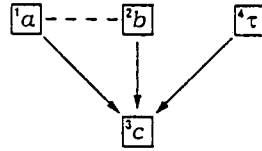
Eine Menge $X \subseteq E$ heißt *Konfiguration* von \mathcal{E} , wenn X endlich, linksabgeschlossen bis auf Konflikte (in \mathcal{E}) und konfliktfrei (in \mathcal{E}) ist

und weiterhin die Relation $<_X := (\prec \cap (X \times X))^+$ keinen Kausalitätszyklus enthält, also irreflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

Die Menge der Konfigurationen von \mathcal{E} heißt $\text{Conf}(\mathcal{E})$.

BEISPIEL 9.6

Die Ereignisstruktur $\mathcal{E} = (E, \prec, \#, 1)$ aus Beispiel 9.2:



hat folgende Konfigurationen:

$$\text{Conf}(\mathcal{E}) = \left\{ \underbrace{\emptyset}_{X_0}, \underbrace{\{e_1\}}_{X_1}, \underbrace{\{e_2\}}_{X_2}, \underbrace{\{e_4\}}_{X_3}, \underbrace{\{e_1, e_4\}}_{X_4}, \underbrace{\{e_2, e_4\}}_{X_5}, \underbrace{\{e_1, e_3, e_4\}}_{X_6}, \underbrace{\{e_2, e_3, e_4\}}_{X_7} \right\}$$

DEFINITION 9.7

[Gla/Go]

Es sei $\mathcal{E} = (E, \prec, \#, 1)$ eine Ereignisstruktur.

\mathcal{E} heißt *endlich*, wenn E endlich ist, und \mathcal{E} heißt *konfliktfrei*, wenn $\# = \emptyset$ gilt.

DEFINITION 9.8

[Gla/Go]

Es sei $\mathcal{E} = (E, \prec, \#, 1)$ eine Ereignisstruktur und $X \subseteq E$ eine Menge.

Man definiert die Einschränkung $\mathcal{E}|_X := (X, \prec \cap (X \times X), \# \cap (X \times X), 1|_X)$.

Es folgt nun die Definition von speziellen Ereignisstrukturen, die zusätzliche Bedingungen erfüllen.

DEFINITION 9.9

[Vogler]

Eine *prime Ereignisstruktur* ist ein Quadrupel $\mathcal{E} = (E, <, \#, l)$, wobei

- E eine Menge von *Ereignissen*
- $<$ eine irreflexive¹, antisymmetrische und transitive Relation (die *Kausalrelation*) mit der Eigenschaft:
für alle $e \in E$ ist $\{d \in E \mid d < e\}$ endlich (Prinzip der *endlichen Ursachen*)
- $\#$ eine irreflexive, symmetrische Relation (die *Konfliktrelation*) mit der Eigenschaft:
für alle $d, e, f \in E$ gilt: $d < e \wedge d \# f \Rightarrow e \# f$ (Prinzip der *Konfliktvererbung*)
- l eine Funktion $l: E \rightarrow \text{Act}$ (die *Markierungsfunktion*)

ist.

Die Menge aller primen Ereignisstrukturen heißt \mathbb{E}_p .

BEISPIEL 9.10

Das folgende Quadrupel ist eine prime Ereignisstruktur:

$\mathcal{E} = (E, <, \#, l)$ mit

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

$< = \{(e_2, e_3)\}$

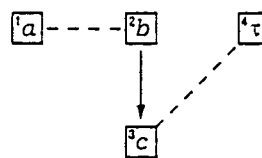
$\# = \{(e_1, e_2), (e_1, e_3), (e_2, e_1), (e_3, e_1), (e_3, e_4), (e_4, e_3)\}$

$l = \{(e_1, a), (e_2, b), (e_3, c), (e_4, \tau)\}$

In der Regel werden prime Ereignisstrukturen graphisch analog der Schreibweise in Beispiel 9.2 wiedergegeben:

- i) Ereignisse e werden als Quadrate mit der Aktion $l(e)$ als Inhalt dargestellt.
- ii) Eine Kausalrelation $d < e$ wird als Pfeil „ \longrightarrow “ dargestellt, wobei transitive Folgepfeile ausgelassen werden.
- iii) Eine Konfliktrelation $d \# e$ wird als gestrichelte Linie „ $- - -$ “ dargestellt, wobei Konfliktvererbungen ausgelassen werden.

Die oben definierte prime Ereignisstruktur wird also durch folgende Graphik dargestellt:



BEMERKUNG 9.11

Jede prime Ereignisstruktur $\mathcal{E} = (E, <, \#, l)$ ist offensichtlich eine Ereignisstruktur, es gilt also $\mathbb{E}_p \subseteq \mathbb{E}$.

DEFINITION 9.12

[Gla/Go]

Es sei $\mathcal{E} = (E, <, \#, l)$ eine prime Ereignisstruktur.

Eine Menge $X \subseteq E$ heißt *linksabgeschlossen* (in \mathcal{E}), wenn für alle $d, e \in E$ mit $e \in X$ und $d < e$ folgt: $d \in X$.

¹ Einige Arbeiten definieren eine reflexive Relation \leq , also eine Halbordnung

BEMERKUNG 9.13

[Gla/Go]

Es sei $\mathcal{E} = (E, <, \#, 1)$ eine prime Ereignisstruktur.

Eine Menge $X \subseteq E$ ist genau dann eine Konfiguration von \mathcal{E} , wenn X endlich, linksabgeschlossen (in \mathcal{E}) und konfliktfrei (in \mathcal{E}) ist.

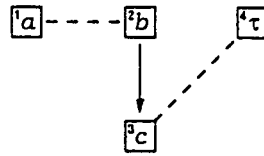
Beweis:

Da die Relation $\#$ das Prinzip der Konfliktvererbung erfüllt, ist jede konfliktfreie linksabgeschlossene Menge $X \subseteq E$ auch linksabgeschlossen bis auf Konflikte.

Da die Relation $<$ transitiv ist, gilt $< = <_X = (< \cap (X \times X))^+$, und da sie irreflexiv ist, enthält sie keinen Kausalitätszyklus. //

BEISPIEL 9.14

Die prime Ereignisstruktur $\mathcal{E} = (E, <, \#, 1)$ aus Beispiel 9.10:



hat folgende Konfigurationen:

$$\text{Conf}(\mathcal{E}) = \left\{ \underbrace{\emptyset}_{X_0}, \underbrace{\{e_1\}}_{X_1}, \underbrace{\{e_2\}}_{X_2}, \underbrace{\{e_4\}}_{X_3}, \underbrace{\{e_1, e_4\}}_{X_4}, \underbrace{\{e_2, e_3\}}_{X_5}, \underbrace{\{e_2, e_4\}}_{X_6} \right\}$$

BEMERKUNG 9.15

Im Unterschied zu Ereignisstrukturen bedeutet eine Kausalrelation $d < e$ zwischen Ereignissen $d, e \in E$ in primen Ereignisstrukturen, daß d eine notwendige Voraussetzung von e ist. Das Ereignis e kann nur dann Element einer Konfiguration sein, wenn sie auch d als Element enthält.

Die nun folgenden Definitionen gelten jeweils sinngemäß für Ereignisstrukturen und für prime Ereignisstrukturen.

DEFINITION 9.16

[Vogler]

Es sei $\mathcal{E} = (E, <, \#, 1)$ eine Ereignisstruktur und $X \subseteq E$ eine Menge.

Man definiert die Menge der *sichtbaren Ereignisse* von X (in \mathcal{E})

$$\text{Vis}(X) := \{e \in E \mid l(e) \neq \tau\}.$$

DEFINITION 9.17

[Gla/Go]

Es sei $\mathcal{E} = (E, <, \#, 1)$ eine Ereignisstruktur und $X \in \text{Conf}(\mathcal{E})$.

Die *Konkurrenzrelation* $\text{co}_X \subseteq X \times X$ bezüglich X (in \mathcal{E}) wird definiert durch:

$$d \text{ co}_X e \Leftrightarrow \neg(d <_X e \vee e <_X d)$$

BEMERKUNG 9.18

[Gla/Go]

Es sei $\mathcal{E} = (E, <, \#, 1)$ eine prime Ereignisstruktur und $X \in \text{Conf}(\mathcal{E})$.

Dann gilt $d \text{ co}_X e \Leftrightarrow \neg(d < e \vee e < d)$.

Man schreibt in diesem Fall auch co statt co_X für jedes $X \in \text{Conf}(\mathcal{E})$.

DEFINITION 9.19

[Gla/Go]

Es sei $\mathcal{E} = (E, \prec, \#, 1)$ eine Ereignisstruktur und $X \in \text{Conf}(\mathcal{E})$.

Ein Element $e \in X$ heißt *maximal* (in X bezüglich \mathcal{E}), wenn für alle $d \in X$ gilt: $e \not\prec_X d$.

BEZEICHNUNG 9.20

Es sei $\mathcal{E} = (E, \prec, \#, 1)$ eine Ereignisstruktur und $X \subseteq E$ eine Menge.

Bei allen oben definierten Begriffen werden die Zusätze „in \mathcal{E} “, „in X “ und „bezüglich \mathcal{E} “ in der Regel weggelassen, soweit Verwechslungen ausgeschlossen sind.

DEFINITION 9.21

[Vogler]

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, \prec_1, \#_1, 1_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, \prec_2, \#_2, 1_2)$ Ereignisstrukturen und $X \subseteq E_1$, $Y \subseteq E_2$.

Eine bijektive Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt *markierungserhaltende Bijektion*, wenn gilt: $l_1(e) = l_2(f(e)) \forall e \in X$.

DEFINITION 9.22

[Gla/Go]

Zwei (prime) Ereignisstrukturen $\mathcal{E}_1 = (E_1, \prec_1, \#_1, 1_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, \prec_2, \#_2, 1_2)$ heißen *isomorph* (geschrieben $\mathcal{E}_1 \cong \mathcal{E}_2$), wenn eine markierungserhaltende Bijektion $f: E_1 \rightarrow E_2$ mit den Eigenschaften:

- i) $d \prec_1 e \Leftrightarrow f(d) \prec_2 f(e) \forall d, e \in E_1$
- ii) $d \#_1 e \Leftrightarrow f(d) \#_2 f(e) \forall d, e \in E_1$

existiert.

BEZEICHNUNG 9.23

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, \prec_1, \#_1, 1_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, \prec_2, \#_2, 1_2)$ Ereignisstrukturen,

$X \in \text{Conf}(\mathcal{E}_1)$, $Y \in \text{Conf}(\mathcal{E}_2)$ Konfigurationen und $X' \subseteq X$, $Y' \subseteq Y$ Mengen.

Soweit Verwechslungen ausgeschlossen sind, gelten folgende Bezeichnungsweisen:

Die Mengen X' und Y' heißen *isomorph* (geschrieben $X' \cong Y'$),

wenn eine markierungserhaltende Bijektion $f: X' \rightarrow Y'$ mit der Eigenschaft: $d \prec_{X'} e \Leftrightarrow f(d) \prec_{Y'} f(e) \forall d, e \in X'$ existiert.

X' heißt *schwächer sequentiell* als Y' (geschrieben $X' \leq Y'$),

wenn eine markierungserhaltende Bijektion $f: X' \rightarrow Y'$ mit der Eigenschaft: $d \prec_X e \Rightarrow f(d) \prec_{Y'} f(e) \forall d, e \in X'$ existiert.

In diesem Fall heißt die Abbildung auch *Homomorphismus* $f: X' \rightarrow Y'$.

Speziell werden für Konfigurationen $X, \bar{X} \in \text{Conf}(\mathcal{E})$ mit $\bar{X} \subseteq X$

die Mengen $\text{Vis}(X) \subseteq X$ und $\text{Vis}(X \setminus \bar{X}) \subseteq X$ grundsätzlich als Teilmengen von X auf die oben beschriebene Weise betrachtet.

BEMERKUNG 9.24

Es seien $\mathcal{E} = (E, \prec, \#, 1)$ eine Ereignisstruktur und $X, \bar{X} \in \text{Conf}(\mathcal{E})$ Konfigurationen mit $\bar{X} \subseteq X$. Dann ist $(\text{Vis}(X \setminus \bar{X}), \prec_X \cap (\text{Vis}(X \setminus \bar{X}) \times \text{Vis}(X \setminus \bar{X})), \emptyset, 1|_{\text{Vis}(X \setminus \bar{X})})$ offenbar eine konfliktfreie prime Ereignisstruktur.

Da die Zustände von Ereignisstrukturen durch ihre Konfigurationen bestimmt werden, definiert man die Transitionen (also Übergänge von einem Zustand zu einem anderen) als Teilmengenbeziehung der Konfigurationen.

DEFINITION 9.25

[Gla/Go]

Es sei $\mathcal{E} = (E, \prec, \#, 1)$ eine Ereignisstruktur.

Man definiert eine *Transition*:

$$X \Longrightarrow_{\mathcal{E}} X' \Leftrightarrow X, X' \in \text{Conf}(\mathcal{E}) \text{ und } X \subseteq X'$$

Soweit Verwechslungen ausgeschlossen sind, wird der Index \mathcal{E} ausgelassen, also nur $X \Longrightarrow X'$ geschrieben.

Bei indizierten Ereignisstrukturen $\mathcal{E}_i, i \in \mathbb{N}$ wird statt $X \Longrightarrow_{\mathcal{E}_i} X'$ vereinfacht $X \Longrightarrow_i X'$ geschrieben.

DEFINITION 9.26

[Gla/Go]

Es sei $\mathcal{E} = (E, \prec, \#, 1)$ eine Ereignisstruktur, $X, X' \in \text{Conf}(\mathcal{E})$ und $\alpha \in \text{Vis}$.

Man definiert:

$$X \xrightarrow{\alpha} X' \Leftrightarrow X \Longrightarrow X' \text{ und } \text{Vis}(X' \setminus X) = \{e\} \text{ mit } l(e) = \alpha$$

Weiterhin gelten die Schreibweisen:

$$X \xrightarrow{\alpha} \Leftrightarrow \exists X' \in \text{Conf}(\mathcal{E}): X \xrightarrow{\alpha} X'$$

$$X \not\xrightarrow{\alpha} X' \Leftrightarrow \neg(X \xrightarrow{\alpha} X')$$

$$X \not\xrightarrow{\alpha} \Leftrightarrow \neg(X \xrightarrow{\alpha})$$

DEFINITION 9.27

[Gla/Go]

Es sei $\mathcal{E} = (E, \prec, \#, 1)$ eine Ereignisstruktur, $X, X' \in \text{Conf}(\mathcal{E})$ und $\omega \in \text{Vis}^*$.

Man definiert mit $\omega = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n, n \in \mathbb{N}$:

$$X \xrightarrow{\omega} X' \Leftrightarrow \exists X_0, X_1, \dots, X_n \in \text{Conf}(\mathcal{E}): X = X_0, X' = X_n \text{ und } X_{i-1} \xrightarrow{\alpha_i} X_i \forall i \in \mathbb{I}_n$$

Speziell wird definiert: $X \xrightarrow{e} X' \Leftrightarrow X \subseteq X' \text{ und } \text{Vis}(X' \setminus X) = \emptyset$.

Weiterhin gelten die Schreibweisen:

$$X \xrightarrow{\omega} \Leftrightarrow \exists X' \in \text{Conf}(\mathcal{E}): X \xrightarrow{\omega} X'$$

$$X \not\xrightarrow{\omega} X' \Leftrightarrow \neg(X \xrightarrow{\omega} X')$$

$$X \not\xrightarrow{\omega} \Leftrightarrow \neg(X \xrightarrow{\omega})$$

Die Möglichkeit der parallelen Ausführung von Aktionen bei einer Transition wird mit der Betrachtung von „Steps“ (Multimengen von Aktionen) berücksichtigt.

DEFINITION 9.28

[Gla/Go]

Es sei $\mathcal{E} = (E, \prec, \#, 1)$ eine Ereignisstruktur, $X, X' \in \text{Conf}(\mathcal{E})$ und $A \in \mathbb{N}_0^{\text{Vis}}$.

Man definiert einen *Step* A :

$$X \xrightarrow{A} X' \Leftrightarrow X \Longrightarrow X' \text{ und für alle } d, e \in \text{Vis}(X' \setminus X) \text{ gilt: } d \text{ co}_X e \\ \text{und } A(\alpha) = \left| \{e \in \text{Vis}(X' \setminus X) \mid l(e) = \alpha\} \right| \forall \alpha \in \text{Vis}$$

In diesem Fall werden auch die Mengen $X' \setminus X$ und $\text{Vis}(X' \setminus X)$ als *Step* bezeichnet. Formal wird das Bild unter der Funktion l definiert als: $l(\text{Vis}(X' \setminus X)) := A$.

DEFINITION 9.29

[Gla/Go]

Es sei $\mathcal{E} = (E, <, \#, 1)$ eine Ereignisstruktur, $X, X' \in \text{Conf}(\mathcal{E})$ und $W \in (\mathbb{N}_0^{V_{\mathcal{E}}})^*$.

Man definiert mit $W = A_1 A_2 \cdots A_n$, $n \in \mathbb{N}$:

$$X \xrightarrow{W} X' \Leftrightarrow \exists X_0, X_1, \dots, X_n \in \text{Conf}(\mathcal{E}): X = X_0, X' = X_n \text{ und } X_{i-1} \xrightarrow{A_i} X_i \quad \forall i \in \mathbb{I}_n$$

Weiterhin gelten die Schreibweisen:

$$X \xrightarrow{W} \Leftrightarrow \exists X' \in \text{Conf}(\mathcal{E}): X \xrightarrow{W} X'$$

$$X \not\xrightarrow{W} X' \Leftrightarrow \neg(X \xrightarrow{W} X')$$

$$X \not\xrightarrow{W} \Leftrightarrow \neg(X \xrightarrow{W})$$

Eine weitere Verallgemeinerung ist die Betrachtung von „Pomsets“ bei beliebigen Transitionen.

DEFINITION 9.30

[Gla/Go]

Es sei $\mathcal{P} = (P, <_p, \emptyset, 1_p)$ eine konfliktfreie prime Ereignisstruktur.

Die Äquivalenzklasse $[(P, <_p, \emptyset, 1_p)]_{\equiv}$ heißt *Pomset (mit unsichtbaren Ereignissen)*.

Die Menge aller Pomsets (mit unsichtbaren Ereignissen) heißt \mathbb{P}_{τ} ,

und man definiert die Menge der *Pomsets (ohne unsichtbare Ereignisse)*:

$$\mathbb{P} := \{[(P, <_p, \emptyset, 1_p)]_{\equiv} \in \mathbb{P}_{\tau} \mid 1_p(e) \neq \tau \quad \forall e \in P\}$$

Im folgenden werden ausschließlich Pomsets ohne unsichtbare Ereignisse betrachtet, und die Elemente $p \in \mathbb{P}$ heißen stets nur *Pomset*.

DEFINITION 9.31

[Gla/Go]

Es sei $\mathcal{E} = (E, <, \#, 1)$ eine Ereignisstruktur und $X \in \text{Conf}(\mathcal{E})$, dann definiert man:

$$[\text{Vis}(X)] := [(\text{Vis}(X), <_X \cap (\text{Vis}(X) \times \text{Vis}(X)), \emptyset, 1|_{\text{Vis}(X)})]_{\equiv}$$

Speziell gilt: $[\emptyset] = [(\emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset)]_{\equiv}$

Weiter definiert man die Menge:

$$\text{pomsets}(\mathcal{E}) := \{[\text{Vis}(X)] \mid X \in \text{Conf}(\mathcal{E})\}$$

BEISPIEL 9.32

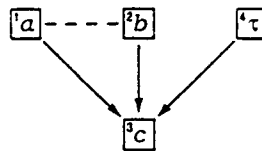
Auch Pomsets werden in der Regel wieder graphisch dargestellt, und zwar als prime Ereignisstrukturen analog Beispiel 9.10.

Da es sich um Isomorphieklassen handelt, werden die Ereignisquadrate nicht indiziert.

Das Pomset $p = [((e_1, e_2, e_3), \{(e_1, e_2)\}, \emptyset, \{(e_1, a), (e_2, b), (e_3, c)\})]_{\equiv} \in \mathbb{P}$

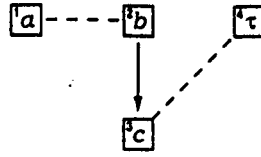
wird also graphisch dargestellt durch: $p = \boxed{a} \longrightarrow \boxed{b} \quad \boxed{c}$.

Die Ereignisstruktur $\mathcal{E} = (E, <, \#, 1)$ aus Beispiel 9.2:



hat folgende Pomsets: $\text{pomsets}(\mathcal{E}) := \{[\emptyset], \boxed{a}, \boxed{b}, \boxed{a} \longrightarrow \boxed{c}, \boxed{b} \longrightarrow \boxed{c}\}$

Die prime Ereignisstruktur $\mathcal{E} = (E, <, \#, 1)$ aus Beispiel 9.10:



hat folgende Pomsets: $\text{pomsets}(\mathcal{E}) := \{[\emptyset], [a], [b], [b] \longrightarrow [c]\}$

DEFINITION 9.33

[Gla/Go]

Es sei $\mathcal{E} = (E, <, \#, 1)$ eine Ereignisstruktur, $X, X' \in \text{Conf}(\mathcal{E})$ und $p \in \mathbb{P}$ ein Pomset.

Man definiert:

$$X \xrightarrow{p} X' \Leftrightarrow X \Longrightarrow X' \text{ und } [\text{Vis}(X' \setminus X)] = p$$

Weiterhin gelten die Schreibweisen:

$$X \xrightarrow{p} \Leftrightarrow \exists X' \in \text{Conf}(\mathcal{E}): X \xrightarrow{p} X'$$

$$X \not\xrightarrow{p} X' \Leftrightarrow \neg(X \xrightarrow{p} X')$$

$$X \not\xrightarrow{p} \Leftrightarrow \neg(X \xrightarrow{p})$$

BEZEICHNUNG 9.34

Es seien $p, p' \in \mathbb{P}$ Pomsets und $\mathcal{P} \in p, \mathcal{P}' \in p'$, dann schreibt man: $p \leq p' \Leftrightarrow \mathcal{P} \leq \mathcal{P}'$.
 p heißt dann analog zur Bezeichnung 9.23 ebenfalls *schwächer sequentiell* als p' .

§10 Bisimulationen

Der einfachste Ansatz für eine Bisimulation auf Ereignisstrukturen ist die Betrachtung von Transitionen zwischen Konfigurationen, bei denen höchstens eine sichtbare Aktion ausgeführt wird. Man nennt dies „verzahnte“ (interleaving) Ausführung der Aktionen und erhält damit eine Äquivalenzrelation, die qualitativ der schwachen Bisimulation auf Transitionssystemen entspricht.

DEFINITION 10.1

[Gla/Go]

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, \prec_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, \prec_2, \#_2, l_2)$ Ereignisstrukturen.

Eine Relation $B \subseteq \text{Conf}(\mathcal{E}_1) \times \text{Conf}(\mathcal{E}_2)$ mit $(\emptyset, \emptyset) \in B$ heißt *Interleaving-Bisimulation* für \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 , wenn für alle $(X, Y) \in B$ und $\alpha \in \text{Vis} \cup \{\epsilon\}$ gilt:

- i) $X \xrightarrow{\alpha}_1 X' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_1) \Rightarrow \exists Y' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_2)$ mit $Y \xrightarrow{\alpha}_2 Y'$ und $(X', Y') \in B$
- ii) $Y \xrightarrow{\alpha}_2 Y' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_2) \Rightarrow \exists X' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_1)$ mit $X \xrightarrow{\alpha}_1 X'$ und $(X', Y') \in B$

Man definiert $\mathcal{E}_1 \approx_b \mathcal{E}_2 \Leftrightarrow \exists B$ Interleaving-Bisimulation für \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 ,

B heißt dann Interleaving-Bisimulation für $\mathcal{E}_1 \approx_b \mathcal{E}_2$,

und man schreibt dafür auch $\mathcal{E}_1 \stackrel{B}{\approx}_b \mathcal{E}_2$.

LEMMA 10.2

[Vogler]

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, \prec_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, \prec_2, \#_2, l_2)$ Ereignisstrukturen.

Eine Relation $B \subseteq \text{Conf}(\mathcal{E}_1) \times \text{Conf}(\mathcal{E}_2)$ mit $(\emptyset, \emptyset) \in B$ ist genau dann Interleaving-Bisimulation für \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 , wenn für alle $(X, Y) \in B$ gilt:

- i) $X \Longrightarrow_1 X' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_1) \Rightarrow \exists Y' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_2)$ mit $Y \Longrightarrow_2 Y'$, $(X', Y') \in B$
und es existiert eine markierungserhaltende Bijektion
 $f: \text{Vis}(X' \setminus X) \rightarrow \text{Vis}(Y' \setminus Y)$
- ii) $Y \Longrightarrow_2 Y' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_2) \Rightarrow \exists X' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_1)$ mit $X \Longrightarrow_1 X'$, $(X', Y') \in B$
und es existiert eine markierungserhaltende Bijektion
 $f: \text{Vis}(X' \setminus X) \rightarrow \text{Vis}(Y' \setminus Y)$

Beweis:

„ \Leftarrow “ klar

„ \Rightarrow “ vollständige Induktion nach $n = |\text{Vis}(X' \setminus X)| \in \mathbb{N}_0$. //

Die Interleaving-Bisimulation erlaubt keine Berücksichtigung der möglichen parallelen Ausführung von Aktionen, wenn Ereignisse miteinander konkurrieren. Eine feinere Bisimulation ergibt sich, wenn man statt Transitionen mit einzelnen Aktionen jeweils Transitionen mit Steps betrachtet.

DEFINITION 10.3

[Gla/Go]

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, \prec_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, \prec_2, \#_2, l_2)$ Ereignisstrukturen.

Eine Relation $B \subseteq \text{Conf}(\mathcal{E}_1) \times \text{Conf}(\mathcal{E}_2)$ mit $(\emptyset, \emptyset) \in B$ heißt *Step-Bisimulation* für \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 , wenn für alle $(X, Y) \in B$ und Steps $A \in \mathbb{N}_0^{\text{Vis}}$ gilt:

- i) $X \xrightarrow{A}_1 X' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_1) \Rightarrow \exists Y' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_2)$ mit $Y \xrightarrow{A}_2 Y'$ und $(X', Y') \in B$
- ii) $Y \xrightarrow{A}_2 Y' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_2) \Rightarrow \exists X' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_1)$ mit $X \xrightarrow{A}_1 X'$ und $(X', Y') \in B$

Man definiert $\mathcal{E}_1 \approx_{sb} \mathcal{E}_2 \Leftrightarrow \exists B$ Step-Bisimulation für \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 ,
 B heißt dann Step-Bisimulation für $\mathcal{E}_1 \approx_{sb} \mathcal{E}_2$,
 und man schreibt dafür auch $\mathcal{E}_1 \stackrel{B}{\approx}_{sb} \mathcal{E}_2$.

LEMMA 10.4

[Vogler]

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, <_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, <_2, \#_2, l_2)$ Ereignisstrukturen.
 Eine Relation $B \subseteq \text{Conf}(\mathcal{E}_1) \times \text{Conf}(\mathcal{E}_2)$ mit $(\emptyset, \emptyset) \in B$ ist genau dann
 Step-Bisimulation für \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 , wenn für alle $(X, Y) \in B$ gilt:

- i) $X \Longrightarrow_1 X' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_1)$ und $X' \setminus X$ ist Step $\Rightarrow \exists Y' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_2)$ mit $Y \Longrightarrow_2 Y'$,
 $(X', Y') \in B$ und $\text{Vis}(X' \setminus X) \equiv \text{Vis}(Y' \setminus Y)$
- ii) $Y \Longrightarrow_2 Y' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_2)$ und $Y' \setminus Y$ ist Step $\Rightarrow \exists X' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_1)$ mit $X \Longrightarrow_1 X'$,
 $(X', Y') \in B$ und $\text{Vis}(X' \setminus X) \equiv \text{Vis}(Y' \setminus Y)$

Beweis:

klar

Das folgende Beispiel veranschaulicht den Unterschied zwischen der rein „verzahnten“
 Betrachtung der Interleaving-Bisimulation und einer möglichen parallelen Ausführung:

BEISPIEL 10.5

[Gla/Go]

Die folgenden primen Ereignisstrukturen $\mathcal{E}_1 = (E_1, <_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, <_2, \#_2, l_2)$
 sind interleaving-bisimilar, aber nicht step-bisimilar:



$$E_1 = \{e_1, e_2\}$$

$$<_1 = \emptyset$$

$$\#_1 = \emptyset$$

$$l_1 = \{(e_1, a), (e_2, b)\}$$

$$E_2 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

$$<_2 = \{(e_1, e_3), (e_2, e_4)\}$$

$$\#_2 = \{(e_1, e_2), (e_1, e_4), (e_2, e_1), (e_2, e_3), (e_3, e_2), (e_3, e_4), (e_4, e_1), (e_4, e_3)\}$$

$$l_2 = \{(e_1, a), (e_2, b), (e_3, b), (e_4, a)\}$$

Beweis:

Die Konfigurationen von \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 sind:

$$\text{Conf}(\mathcal{E}_1) = \left\{ \underbrace{\emptyset}_{X_0}, \underbrace{\{e_1\}}_{X_1}, \underbrace{\{e_2\}}_{X_2}, \underbrace{\{e_1, e_2\}}_{X_3} \right\}$$

$$\text{Conf}(\mathcal{E}_2) = \left\{ \underbrace{\emptyset}_{Y_0}, \underbrace{\{e_1\}}_{Y_1}, \underbrace{\{e_2\}}_{Y_2}, \underbrace{\{e_1, e_3\}}_{Y_3}, \underbrace{\{e_2, e_4\}}_{Y_4} \right\}$$

$B = \{(X_0, Y_0), (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3), (X_3, Y_4)\}$ ist eine Interleaving-Bisimulation, also gilt $\mathcal{E}_1 \approx_b \mathcal{E}_2$.

Andererseits gilt aber $X_0 \xrightarrow{1} X_3$ mit dem Step $[Vis(X_3 \setminus X_0)] = \boxed{a} \boxed{b}$, aber weder $[Vis(Y_3 \setminus Y_0)] = \boxed{a} \longrightarrow \boxed{b}$ noch $[Vis(Y_4 \setminus Y_0)] = \boxed{b} \longrightarrow \boxed{a}$ ist ein Step, und damit folgt $\mathcal{E}_1 \not\approx_{sb} \mathcal{E}_2$.

SATZ 10.6

[Gla/Go]

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, <_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, <_2, \#_2, l_2)$ Ereignisstrukturen mit $\mathcal{E}_1 \approx_{sb} \mathcal{E}_2$. Dann gilt $\mathcal{E}_1 \approx_{ib} \mathcal{E}_2$.

Beweis:

[Gla/Go]

Jede Transition $X \xrightarrow{\alpha} X'$, $\alpha \in Vis \cup \{\varepsilon\}$ ist immer auch ein Step

$X \xrightarrow{A} X'$, $A \in \mathbb{N}_0^{Vis}$ mit:

$$A(\beta) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \beta = \alpha = \varepsilon \\ 1 & \text{falls } \beta = \alpha \neq \varepsilon \\ 0 & \text{falls } \beta \neq \alpha \end{cases}$$

und damit ist jede Step-Bisimulation auch eine Interleaving-Bisimulation. //

Noch feinere Bisimulationen erhält man, wenn man statt Transitionen mit Steps beliebige Transitionen (also Transitionen mit Pomsets) zuläßt und in der jeweils anderen Ereignisstruktur Transitionen mit isomorphen Pomsets fordert.

Zunächst wird allerdings erst noch eine etwas gröbere Bisimulation betrachtet, bei der statt isomorpher Pomsets eine Transition mit einem schwächer sequentiellen Pomset $p' \leq p$ genügt.

DEFINITION 10.7

[Vogler]

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, <_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, <_2, \#_2, l_2)$ Ereignisstrukturen.

Eine Relation $B \subseteq Conf(\mathcal{E}_1) \times Conf(\mathcal{E}_2)$ mit $(\emptyset, \emptyset) \in B$ heißt *Partial Word-Bisimulation* für \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 , wenn für alle $(X, Y) \in B$ und Pomsets $p \in \mathbb{P}$ gilt:

- i) $X \xrightarrow{p} X' \in Conf(\mathcal{E}_1) \Rightarrow \exists Y' \in Conf(\mathcal{E}_2), p' \leq p$ mit $Y \xrightarrow{p'} Y'$ und $(X', Y') \in B$
- ii) $Y \xrightarrow{p} Y' \in Conf(\mathcal{E}_2) \Rightarrow \exists X' \in Conf(\mathcal{E}_1), p' \leq p$ mit $X \xrightarrow{p'} X'$ und $(X', Y') \in B$

Man definiert $\mathcal{E}_1 \approx_{pwb} \mathcal{E}_2 \Leftrightarrow \exists B$ Partial Word-Bisimulation für \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 ,

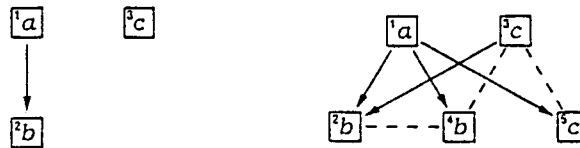
B heißt dann Partial Word-Bisimulation für $\mathcal{E}_1 \approx_{pwb} \mathcal{E}_2$,

und man schreibt dafür auch $\mathcal{E}_1 \stackrel{B}{\approx}_{pwb} \mathcal{E}_2$.

BEISPIEL 10.8

[Vogler]

Die folgenden primen Ereignisstrukturen $\mathcal{E}_1 = (E_1, <_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, <_2, \#_2, l_2)$ sind step-bisimilar, aber nicht partial word-bisimilar:



$$E_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$$

$$<_1 = \{(e_1, e_2)\}$$

$$\#_1 = \emptyset$$

$$l_1 = \{(e_1, a), (e_2, b), (e_3, c)\}$$

$$E_2 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

$$<_2 = \{(e_1, e_2), (e_1, e_4), (e_1, e_5), (e_3, e_2)\}$$

$$\#_2 = \{(e_2, e_4), (e_2, e_5), (e_3, e_4), (e_3, e_5), (e_4, e_2), (e_4, e_3), (e_5, e_2), (e_5, e_3)\}$$

$$l_2 = \{(e_1, a), (e_2, b), (e_3, c), (e_4, b), (e_5, c)\}$$

Beweis:

Die Konfigurationen von \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 sind:

$$\text{Conf}(\mathcal{E}_1) = \left\{ \underbrace{\emptyset}_{X_0}, \underbrace{\{e_1\}}_{X_1}, \underbrace{\{e_3\}}_{X_2}, \underbrace{\{e_1, e_2\}}_{X_3}, \underbrace{\{e_1, e_3\}}_{X_4}, \underbrace{\{e_1, e_2, e_3\}}_{X_5} \right\}$$

$$\text{Conf}(\mathcal{E}_2) = \left\{ \underbrace{\emptyset}_{Y_0}, \underbrace{\{e_1\}}_{Y_1}, \underbrace{\{e_3\}}_{Y_2}, \underbrace{\{e_1, e_3\}}_{Y_3}, \underbrace{\{e_1, e_4\}}_{Y_4}, \underbrace{\{e_1, e_5\}}_{Y_5}, \underbrace{\{e_1, e_2, e_3\}}_{Y_6}, \underbrace{\{e_1, e_4, e_5\}}_{Y_7} \right\}$$

$$B = \{(X_0, Y_0), (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_4, Y_3), (X_3, Y_4), (X_4, Y_5), (X_5, Y_7), (X_5, Y_6)\}$$

ist eine Step-Bisimulation, also gilt $\mathcal{E}_1 \approx_{sb} \mathcal{E}_2$.

Andererseits gilt $X_0 \Longrightarrow_1 X_5$, aber weder

$$[\text{Vis}(Y_6 \setminus Y_0)] = \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline c \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|} \hline b \\ \hline \end{array}$$

noch

$$[\text{Vis}(Y_7 \setminus Y_0)] = \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \nearrow \begin{array}{|c|} \hline b \\ \hline \end{array} \\ \searrow \begin{array}{|c|} \hline c \\ \hline \end{array} \end{array}$$

ist schwächer sequentiell als $[\text{Vis}(X_5 \setminus X_0)] = \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|} \hline b \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline c \\ \hline \end{array}$,

und damit gilt $\mathcal{E}_1 \not\approx_{pwb} \mathcal{E}_2$.

SATZ 10.9

[Vogler]

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, <_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, <_2, \#_2, l_2)$ Ereignisstrukturen mit $\mathcal{E}_1 \approx_{pwb} \mathcal{E}_2$. Dann gilt $\mathcal{E}_1 \approx_{sb} \mathcal{E}_2$.

Beweis:

[Vogler]

Es sei $B \subseteq \text{Conf}(\mathcal{E}_1) \times \text{Conf}(\mathcal{E}_2)$ eine Partial Word-Bisimulation und

$(X, Y) \in B$. Es gelte $X \xrightarrow{A}_1 X'$, $A \in \mathbb{N}_0^{\text{Vis}}$, also ist $X' \setminus X$ ein Step.

Dann existiert für $p = [\text{Vis}(X' \setminus X)]$ ein $p' \leq p$ mit $Y \xrightarrow{p'}_2 Y'$, $(X', Y') \in B$.

Da p' schwächer sequentiell ist als $[\text{Vis}(X' \setminus X)]$, ist auch $Y' \setminus Y$ ein Step.

Aus Symmetriegründen ist B eine Step-Bisimulation. //

Es folgt nun die oben erwähnte noch feinere Bisimulation, bei der statt schwächerer sequentieller Transitionen isomorphe Pomsets gefordert werden.

DEFINITION 10.10

[Vogler]

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, <_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, <_2, \#_2, l_2)$ Ereignisstrukturen.

Eine Relation $B \subseteq \text{Conf}(\mathcal{E}_1) \times \text{Conf}(\mathcal{E}_2)$ mit $(\emptyset, \emptyset) \in B$ heißt *Pomset-Bisimulation* für \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 , wenn für alle $(X, Y) \in B$ und Pomsets $p \in \mathbb{P}$ gilt:

- i) $X \xrightarrow{p}_1 X' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_1) \Rightarrow \exists Y' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_2)$ mit $Y \xrightarrow{p}_2 Y'$ und $(X', Y') \in B$
- ii) $Y \xrightarrow{p}_2 Y' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_2) \Rightarrow \exists X' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_1)$ mit $X \xrightarrow{p}_1 X'$ und $(X', Y') \in B$

Man definiert $\mathcal{E}_1 \approx_{pb} \mathcal{E}_2 \Leftrightarrow \exists B$ Pomset-Bisimulation für \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 ,

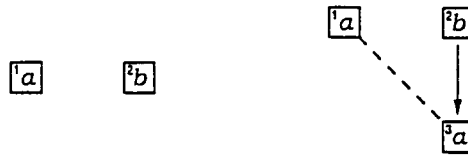
B heißt dann Pomset-Bisimulation für $\mathcal{E}_1 \approx_{pb} \mathcal{E}_2$,

und man schreibt dafür auch $\mathcal{E}_1 \stackrel{B}{\approx}_{pb} \mathcal{E}_2$.

BEISPIEL 10.11

[Vogler]

Die folgenden primen Ereignisstrukturen $\mathcal{E}_1 = (E_1, <_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, <_2, \#_2, l_2)$ sind partial word-bisimilar, aber nicht pomset-bisimilar:



$\mathcal{E}_1 = (E_1, <_1, \#_1, l_1)$ siehe Beispiel 10.5

$E_2 = \{e_1, e_2, e_3\}$

$<_2 = \{(e_2, e_3)\}$

$\#_2 = \{(e_1, e_3), (e_3, e_1)\}$

$l_2 = \{(e_1, a), (e_2, b), (e_3, a)\}$

Beweis:

Die Konfigurationen von \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 sind:

$$\text{Conf}(\mathcal{E}_1) = \left\{ \emptyset, \underbrace{\{e_1\}}_{X_0}, \underbrace{\{e_2\}}_{X_1}, \underbrace{\{e_1, e_2\}}_{X_2}, \underbrace{\{e_1, e_2\}}_{X_3} \right\}$$

$$\text{Conf}(\mathcal{E}_2) = \left\{ \emptyset, \underbrace{\{e_1\}}_{Y_0}, \underbrace{\{e_2\}}_{Y_1}, \underbrace{\{e_1, e_2\}}_{Y_2}, \underbrace{\{e_1, e_2, e_3\}}_{Y_3}, \underbrace{\{e_2, e_3\}}_{Y_4} \right\}$$

$B = \{(X_0, Y_0), (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3), (X_3, Y_4)\}$ ist eine Partial Word-Bisimulation, also gilt $\mathcal{E}_1 \approx_{pwb} \mathcal{E}_2$.

Andererseits gilt $Y_0 \xRightarrow{a}_2 Y_4$, aber $[\text{Vis}(Y_4 \setminus Y_0)] = [b] \longrightarrow [a]$ ist ungleich $[\text{Vis}(X_3 \setminus X_0)] = [a] \quad [b]$, und damit gilt $\mathcal{E}_1 \not\approx_{pb} \mathcal{E}_2$.

SATZ 10.12

[Vogler]

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, <_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, <_2, \#_2, l_2)$ Ereignisstrukturen mit $\mathcal{E}_1 \approx_{pb} \mathcal{E}_2$.

Dann gilt $\mathcal{E}_1 \approx_{pwb} \mathcal{E}_2$.

Beweis:

[Vogler]

Für alle Pomsets $p \in \mathbb{P}$ gilt sofort $p \leq p$, also ist jede Pomset-Bisimulation auch eine Partial Word-Bisimulation. //

Die stärkste Bisimulation ergibt sich mit der Forderung, daß zunächst alle identifizierten Konfigurationspaare isomorph sind. Bei einer beliebigen Transition von einer Konfiguration aus soll nicht nur eine Transition in der jeweils anderen Ereignisstruktur mit einem isomorphen Pomset möglich sein, sondern das erreichte neue Konfigurationspaar muß selbst wieder isomorph sein, und der neue Isomorphismus muß sich auf den ursprünglichen Konfigurationen auch auf den ursprünglichen Isomorphismus einschränken.

Um diese Forderungen zu formulieren, muß der jeweilige Isomorphismus in die Bisimulation aufgenommen werden.

DEFINITION 10.13

[Vogler]

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, <_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, <_2, \#_2, l_2)$ Ereignisstrukturen.

Eine Relation $B \subseteq \text{Conf}(\mathcal{E}_1) \times \text{Conf}(\mathcal{E}_2) \times (E_1 \rightarrow E_2)$ mit $(\emptyset, \emptyset, \emptyset) \in B$ heißt

History Preserving-Bisimulation für \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 , wenn für alle $(X, Y, f) \in B$ gilt:

- o) $f: \text{Vis}(X) \rightarrow \text{Vis}(Y)$ ist ein Isomorphismus
- i) $X \Longrightarrow_1 X' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_1) \Rightarrow \exists Y' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_2), f' \in E_1 \rightarrow E_2$ mit $Y \Longrightarrow_2 Y', f'|_{\text{Vis}(X)} = f, (X', Y', f') \in B$ und $f': \text{Vis}(X') \rightarrow \text{Vis}(Y')$ ist ein Isomorphismus.
- ii) $Y \Longrightarrow_2 Y' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_2) \Rightarrow \exists X' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_1), f' \in E_1 \rightarrow E_2$ mit $X \Longrightarrow_1 X', f'|_{\text{Vis}(X)} = f, (X', Y', f') \in B$ und $f': \text{Vis}(X') \rightarrow \text{Vis}(Y')$ ist ein Isomorphismus.

Man definiert $\mathcal{E}_1 \approx_{hb} \mathcal{E}_2 \Leftrightarrow \exists B$ History Preserving-Bisimulation für \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 ,

B heißt dann History Preserving-Bisimulation für $\mathcal{E}_1 \approx_{hb} \mathcal{E}_2$,

und man schreibt dafür auch $\mathcal{E}_1 \stackrel{B}{\approx}_{hb} \mathcal{E}_2$.

BEISPIEL 10.14

[Vogler]

Die folgenden primen Ereignisstrukturen $\mathcal{E}_1 = (E_1, <_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, <_2, \#_2, l_2)$ sind pomset-bisimilar, aber nicht history preserving-bisimilar:



$$E_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$$

$$<_1 = \{(e_1, e_3)\}$$

$$\#_1 = \{(e_2, e_3), (e_3, e_2)\}$$

$$l_1 = \{(e_1, a), (e_2, b), (e_3, b)\}$$

$$E_2 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

$$<_2 = \{(e_1, e_3)\}$$

$$\#_2 = \{(e_1, e_2), (e_1, e_4), (e_2, e_1), (e_2, e_3), (e_3, e_2), (e_3, e_4), (e_4, e_1), (e_4, e_3)\}$$

$$l_2 = \{(e_1, a), (e_2, b), (e_3, b), (e_4, a)\}$$

Beweis:

Die Konfigurationen von \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 sind:

$$\text{Conf}(\mathcal{E}_1) = \left\{ \underbrace{\emptyset}_{x_0}, \underbrace{\{e_1\}}_{x_1}, \underbrace{\{e_2\}}_{x_2}, \underbrace{\{e_1, e_2\}}_{x_3}, \underbrace{\{e_1, e_3\}}_{x_4} \right\}$$

$$\text{Conf}(\mathcal{E}_2) = \left\{ \underbrace{\emptyset}_{Y_0}, \underbrace{\{e_1\}}_{Y_1}, \underbrace{\{e_2\}}_{Y_2}, \underbrace{\{e_4\}}_{Y_3}, \underbrace{\{e_1, e_3\}}_{Y_4}, \underbrace{\{e_2, e_4\}}_{Y_5} \right\}$$

$B = \{(X_0, Y_0), (X_1, Y_1), (X_1, Y_3), (X_2, Y_2), (X_3, Y_5), (X_4, Y_4), (X_3, Y_4), (X_4, Y_5)\}$
ist eine Pomset-Bisimulation, also gilt $\mathcal{E}_1 \approx_{pb} \mathcal{E}_2$.

Angenommen, es existiert eine History Preserving-Bisimulation B für \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 . Es gilt $Y_0 \xrightarrow{a} Y_3$, woraus $(X_1, Y_3, \{(e_1, e_4)\}) \in B$ folgt.

Wegen $X_1 \xrightarrow{b} X_4$ muß $(X_4, Y_5, \{(e_1, e_4), (e_3, e_2)\}) \in B$ gelten, aber $\{(e_1, e_4), (e_3, e_2)\}$ ist keine Isomorphie zwischen $[\text{Vis}(X_4)] = \boxed{a} \longrightarrow \boxed{b}$ und $[\text{Vis}(Y_4)] = \boxed{a} \quad \boxed{b}$, und damit gilt $\mathcal{E}_1 \not\approx_{hb} \mathcal{E}_2$.

Um die History Preserving-Bisimulation mit der Pomset-Bisimulation direkt vergleichen zu können, wird zunächst die Definition der Pomset-Bisimulation formal der Formulierung mit der einbezogenen Funktion angeglichen:

LEMMA 10.15

[Vogler]

Zwei Ereignisstrukturen $\mathcal{E}_1 = (E_1, <_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, <_2, \#_2, l_2)$ sind genau dann pomset-bisimilar, wenn eine Relation $B \subseteq \text{Conf}(\mathcal{E}_1) \times \text{Conf}(\mathcal{E}_2) \times (E_1 \rightarrow E_2)$ mit $(\emptyset, \emptyset, \emptyset) \in B$ existiert, so daß für alle $(X, Y, f) \in B$ gilt:

- o) $f: \text{Vis}(X) \rightarrow \text{Vis}(Y)$ ist eine markierungserhaltende Bijektion
- i) $X \xRightarrow{1} X' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_1) \Rightarrow \exists Y' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_2), f' \in E_1 \rightarrow E_2 \text{ mit } Y \xRightarrow{2} Y',$
 $f'|_{\text{Vis}(X)} = f \text{ und } (X', Y', f') \in B$
und $f'|_{\text{Vis}(X' \setminus X)}: \text{Vis}(X' \setminus X) \rightarrow \text{Vis}(Y' \setminus Y)$ ist ein Isomorphismus.
- ii) $Y \xRightarrow{2} Y' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_2) \Rightarrow \exists X' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_1), f' \in E_1 \rightarrow E_2 \text{ mit } X \xRightarrow{1} X',$
 $f'|_{\text{Vis}(X)} = f \text{ und } (X', Y', f') \in B$
und $f'|_{\text{Vis}(X' \setminus X)}: \text{Vis}(X' \setminus X) \rightarrow \text{Vis}(Y' \setminus Y)$ ist ein Isomorphismus.

Beweis:

[Vogler]

„ \Rightarrow “ Es existiert eine Pomset-Bisimulation \bar{B} .

Man definiert $B \subseteq \text{Conf}(\mathcal{E}_1) \times \text{Conf}(\mathcal{E}_2) \times (E_1 \rightarrow E_2)$ durch:

$(X, Y, f) \in B \Leftrightarrow \exists \emptyset = X_0 \subseteq X_1 \subseteq \dots \subseteq X_n = X \in \text{Conf}(\mathcal{E}_1),$
 $\emptyset = Y_0 \subseteq Y_1 \subseteq \dots \subseteq Y_n = Y \in \text{Conf}(\mathcal{E}_2) \text{ mit } (X_i, Y_i) \in \bar{B} \forall i \in \mathbb{I}_n$

und der Eigenschaft $f = \bigcup_{i=1}^n f_i$, wobei $f_i: \text{Vis}(X_i \setminus X_{i-1}) \rightarrow \text{Vis}(Y_i \setminus Y_{i-1}), i \in \mathbb{I}_n$

markierungserhaltende Bijektionen sind.

Für alle $(X, Y, f) \in B$ ist dann $f: \text{Vis}(X) \rightarrow \text{Vis}(Y)$ immer eine markierungserhaltende Bijektion.

Wenn $X \xrightarrow{p} X'$ für ein $p \in \mathbb{P}$ gilt, dann gibt es ein $Y' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_2)$ mit $Y \xrightarrow{p} Y'$ und $(X', Y') \in \bar{B}$.

Speziell gibt es einen Isomorphismus $f'': \text{Vis}(X' \setminus X) \rightarrow \text{Vis}(Y' \setminus Y)$, und damit gilt $(X', Y', f \cup f'') \in B$.

„ \Leftarrow “ $\bar{B} := \Pi_{1,2}(B)$ erfüllt offensichtlich Definition 10.10. //

SATZ 10.16

[Gla/Go]

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, <_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, <_2, \#_2, l_2)$ Ereignisstrukturen mit $\mathcal{E}_1 \approx_{hb} \mathcal{E}_2$. Dann gilt $\mathcal{E}_1 \approx_{pb} \mathcal{E}_2$.

Beweis:

[Vogler]

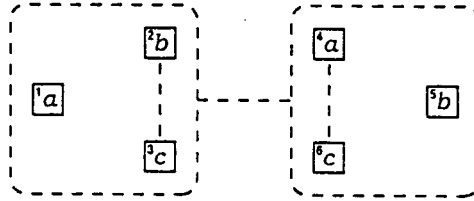
Wenn $f': \text{Vis}(X') \rightarrow \text{Vis}(Y')$ ein Isomorphismus ist und $\text{Vis}(X' \setminus X) \cong \text{Vis}(Y' \setminus Y)$ gilt, dann ist speziell auch $f'|_{\text{Vis}(X' \setminus X)}: \text{Vis}(X' \setminus X) \rightarrow \text{Vis}(Y' \setminus Y)$ ein Isomorphismus. Also ist mit Lemma 10.15 jede History Preserving-Bisimulation auch eine Pomset-Bisimulation. //

BEISPIEL 10.17

[Gla/Go]

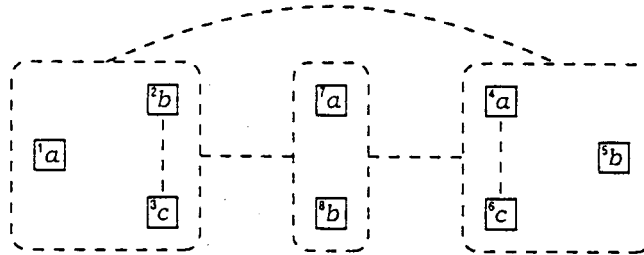
Die folgenden primen Ereignisstrukturen $\mathcal{E}_1 = (E_1, <_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, <_2, \#_2, l_2)$ sind history preserving-bisimilar¹, aber offensichtlich nicht isomorph:

Die Ereignisstruktur \mathcal{E}_1 wird dargestellt durch:



Dabei bedeuten die gestrichelten Umrahmungen, daß jeweils jedes Ereignis eines Rahmens mit jedem Ereignis des anderen Rahmens in Konflikt steht.

Analog wird die Ereignisstruktur \mathcal{E}_2 dargestellt durch:



$$E_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$$

$$<_1 = \emptyset$$

$$\#_1 = \{(e_1, e_4), (e_1, e_5), (e_1, e_6), (e_2, e_3), (e_2, e_4), (e_2, e_5), (e_2, e_6), \\ (e_3, e_2), (e_3, e_4), (e_3, e_5), (e_3, e_6), (e_4, e_1), (e_4, e_2), (e_4, e_3), \\ (e_4, e_6), (e_5, e_1), (e_5, e_2), (e_5, e_3), (e_6, e_1), (e_6, e_2), (e_6, e_3), (e_6, e_4)\}$$

$$l_1 = \{(e_1, a), (e_2, b), (e_3, c), (e_4, a), (e_5, b), (e_6, c)\}$$

¹ Die Äquivalenz dieser Ereignisstrukturen wird in der Literatur auch „Absorptionsgesetz“ genannt, vgl. [Gla/Go]

$$E_2 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$$

$$<_2 = \emptyset$$

$$\#_2 = \{(e_1, e_4), (e_1, e_5), (e_1, e_6), (e_1, e_7), (e_1, e_8), (e_2, e_3), (e_2, e_4), (e_2, e_5), (e_2, e_6), (e_2, e_7), (e_2, e_8), (e_3, e_2), (e_3, e_4), (e_3, e_5), (e_3, e_6), (e_3, e_7), (e_3, e_8), (e_4, e_1), (e_4, e_2), (e_4, e_3), (e_4, e_6), (e_4, e_7), (e_4, e_8), (e_5, e_1), (e_5, e_2), (e_5, e_3), (e_5, e_7), (e_5, e_8), (e_6, e_1), (e_6, e_2), (e_6, e_3), (e_6, e_4), (e_6, e_7), (e_6, e_8), (e_7, e_1), (e_7, e_2), (e_7, e_3), (e_7, e_4), (e_7, e_5), (e_7, e_6), (e_8, e_1), (e_8, e_2), (e_8, e_3), (e_8, e_4), (e_8, e_5), (e_8, e_6)\}$$

$$I_2 = \{(e_1, a), (e_2, b), (e_3, c), (e_4, a), (e_5, b), (e_6, c), (e_7, a), (e_8, b)\}$$

Beweis:

Die Konfigurationen von \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 sind:

$$\begin{aligned} \text{Conf}(\mathcal{E}_1) &= \left\{ \underbrace{\emptyset}_{X_0}, \underbrace{\{e_1\}}_{X_1}, \underbrace{\{e_2\}}_{X_2}, \underbrace{\{e_3\}}_{X_3}, \underbrace{\{e_4\}}_{X_4}, \underbrace{\{e_5\}}_{X_5}, \underbrace{\{e_6\}}_{X_6}, \underbrace{\{e_1, e_2\}}_{X_7}, \underbrace{\{e_1, e_3\}}_{X_8}, \underbrace{\{e_4, e_5\}}_{X_9}, \underbrace{\{e_5, e_6\}}_{X_{10}} \right\} \\ \text{Conf}(\mathcal{E}_2) &= \left\{ \underbrace{\emptyset}_{Y_0}, \underbrace{\{e_1\}}_{Y_1}, \underbrace{\{e_2\}}_{Y_2}, \underbrace{\{e_3\}}_{Y_3}, \underbrace{\{e_4\}}_{Y_4}, \underbrace{\{e_5\}}_{Y_5}, \underbrace{\{e_6\}}_{Y_6}, \underbrace{\{e_7\}}_{Y_7}, \underbrace{\{e_8\}}_{Y_8}, \right. \\ &\quad \left. \underbrace{\{e_1, e_2\}}_{Y_9}, \underbrace{\{e_1, e_3\}}_{Y_{10}}, \underbrace{\{e_4, e_5\}}_{Y_{11}}, \underbrace{\{e_5, e_6\}}_{Y_{12}}, \underbrace{\{e_7, e_8\}}_{Y_{13}} \right\} \end{aligned}$$

Die folgende Relation ist eine History Preserving-Bisimulation:

$$\begin{aligned} B = \{ & (X_0, Y_0, \emptyset), \\ & (X_1, Y_1, \{(e_1, e_1)\}), \\ & (X_2, Y_2, \{(e_2, e_2)\}), \\ & (X_2, Y_8, \{(e_2, e_8)\}), \\ & (X_3, Y_3, \{(e_3, e_3)\}), \\ & (X_4, Y_4, \{(e_4, e_4)\}), \\ & (X_4, Y_7, \{(e_4, e_7)\}), \\ & (X_5, Y_5, \{(e_5, e_5)\}), \\ & (X_6, Y_6, \{(e_6, e_6)\}), \\ & (X_7, Y_9, \{(e_1, e_1), (e_2, e_2)\}), \\ & (X_7, Y_{11}, \{(e_1, e_4), (e_2, e_5)\}), \\ & (X_7, Y_{13}, \{(e_1, e_7), (e_2, e_8)\}), \\ & (X_8, Y_{10}, \{(e_1, e_1), (e_3, e_3)\}), \\ & (X_9, Y_9, \{(e_4, e_1), (e_5, e_2)\}), \\ & (X_9, Y_{11}, \{(e_4, e_4), (e_5, e_5)\}), \\ & (X_9, Y_{13}, \{(e_4, e_7), (e_5, e_8)\}), \\ & (X_{10}, Y_{12}, \{(e_5, e_5), (e_6, e_6)\}) \} \end{aligned}$$

Analog der Formulierung in Lemma 10.15 werden nun auch die anderen Bisimulationen in die gleiche Form gebracht, damit in den weiteren Kapiteln alle Bisimulationen technisch auf die gleiche Weise behandeln werden können.

LEMMA 10.18

[Vogler]

Zwei Ereignisstrukturen $\mathcal{E}_1 = (E_1, \prec_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, \prec_2, \#_2, l_2)$ sind genau dann interleaving-bisimilar, wenn eine Relation $B \subseteq \text{Conf}(\mathcal{E}_1) \times \text{Conf}(\mathcal{E}_2) \times (E_1 \rightarrow E_2)$ mit $(\emptyset, \emptyset, \emptyset) \in B$ existiert, so daß für alle $(X, Y, f) \in B$ gilt:

- o) $f: \text{Vis}(X) \rightarrow \text{Vis}(Y)$ ist eine markierungserhaltende Bijektion
- i) $X \Longrightarrow_1 X' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_1) \Rightarrow \exists Y' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_2), f' \in E_1 \rightarrow E_2$ mit $Y \Longrightarrow_2 Y', f'|_{\text{Vis}(X)} = f$ und $(X', Y', f') \in B$.
- ii) $Y \Longrightarrow_2 Y' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_2) \Rightarrow \exists X' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_1), f' \in E_1 \rightarrow E_2$ mit $X \Longrightarrow_1 X', f'|_{\text{Vis}(X)} = f$ und $(X', Y', f') \in B$.

Beweis:

[Vogler]

„ \Rightarrow “ Analog Lemma 10.15, wobei $f'': \text{Vis}(X' \setminus X) \rightarrow \text{Vis}(Y' \setminus Y)$ die markierungserhaltenden Bijektionen aus Lemma 10.2 sind.

„ \Leftarrow “ $\bar{B} := \Pi_{1,2}(B)$ erfüllt offensichtlich Lemma 10.2. //

LEMMA 10.19

[Vogler]

Zwei Ereignisstrukturen $\mathcal{E}_1 = (E_1, \prec_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, \prec_2, \#_2, l_2)$ sind genau dann step-bisimilar, wenn eine Relation $B \subseteq \text{Conf}(\mathcal{E}_1) \times \text{Conf}(\mathcal{E}_2) \times (E_1 \rightarrow E_2)$ mit $(\emptyset, \emptyset, \emptyset) \in B$ existiert, so daß für alle $(X, Y, f) \in B$ gilt:

- o) $f: \text{Vis}(X) \rightarrow \text{Vis}(Y)$ ist eine markierungserhaltende Bijektion
- i) $X \Longrightarrow_1 X' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_1), \text{Vis}(X' \setminus X)$ ist Step
 $\Rightarrow \exists Y' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_2), f' \in E_1 \rightarrow E_2$ mit $Y \Longrightarrow_2 Y', f'|_{\text{Vis}(X)} = f$ und $(X', Y', f') \in B$
 und $f'|_{\text{Vis}(X' \setminus X)}: \text{Vis}(X' \setminus X) \rightarrow \text{Vis}(Y' \setminus Y)$ ist Isomorphismus.
- ii) $Y \Longrightarrow_2 Y' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_2), \text{Vis}(Y' \setminus Y)$ ist Step
 $\Rightarrow \exists X' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_1), f' \in E_1 \rightarrow E_2$ mit $X \Longrightarrow_1 X', f'|_{\text{Vis}(X)} = f$ und $(X', Y', f') \in B$
 und $f'|_{\text{Vis}(X' \setminus X)}: \text{Vis}(X' \setminus X) \rightarrow \text{Vis}(Y' \setminus Y)$ ist Isomorphismus.

Beweis:

[Vogler]

„ \Rightarrow “ Analog Lemma 10.15, wobei $f'': \text{Vis}(X' \setminus X) \rightarrow \text{Vis}(Y' \setminus Y)$ die Isomorphismen aus Lemma 10.4 sind.

„ \Leftarrow “ $\bar{B} := \Pi_{1,2}(B)$ erfüllt offensichtlich Lemma 10.4. //

LEMMA 10.20

[Vogler]

Zwei Ereignisstrukturen $\mathcal{E}_1 = (E_1, \prec_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, \prec_2, \#_2, l_2)$ sind genau dann partial word-bisimilar, wenn eine Relation $B \subseteq \text{Conf}(\mathcal{E}_1) \times \text{Conf}(\mathcal{E}_2) \times (E_1 \rightarrow E_2)$ mit $(\emptyset, \emptyset, \emptyset) \in B$ existiert, so daß für alle $(X, Y, f) \in B$ gilt:

- o) $f: \text{Vis}(X) \rightarrow \text{Vis}(Y)$ ist eine markierungserhaltende Bijektion
- i) $X \Longrightarrow_1 X' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_1) \Rightarrow \exists Y' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_2), f' \in E_1 \rightarrow E_2$ mit $Y \Longrightarrow_2 Y', f'|_{\text{Vis}(X)} = f$ und $(X', Y', f') \in B$
 und $f'^{-1}|_{\text{Vis}(Y' \setminus Y)}: \text{Vis}(Y' \setminus Y) \rightarrow \text{Vis}(X' \setminus X)$ ist Homomorphismus.
- ii) $Y \Longrightarrow_2 Y' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_2) \Rightarrow \exists X' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_1), f' \in E_1 \rightarrow E_2$ mit $X \Longrightarrow_1 X', f'|_{\text{Vis}(X)} = f$ und $(X', Y', f') \in B$
 und $f'|_{\text{Vis}(X' \setminus X)}: \text{Vis}(X' \setminus X) \rightarrow \text{Vis}(Y' \setminus Y)$ ist Homomorphismus.

Beweis:

[Vogler]

„ \Rightarrow “ Analog Lemma 10.15, wobei $f'': \text{Vis}(X' \setminus X) \rightarrow \text{Vis}(Y' \setminus Y)$ bzw.
 $f''^{-1}: \text{Vis}(Y' \setminus Y) \rightarrow \text{Vis}(X' \setminus X)$ die jeweiligen Homomorphismen aus
 Definition 10.7 sind.

„ \Leftarrow “ $\bar{B} := \Pi_{1,2}(B)$ erfüllt offensichtlich Definition 10.7. //

BEMERKUNG 10.21

[Gla/Go]

Es genügt, in Definition 10.13 für eine History Preserving-Bisimulation B in i) nur
 Transitionen $X \Longrightarrow_1 X'$ mit $|\text{Vis}(X' \setminus X)| \leq 1$ und in ii) nur Transitionen $Y \Longrightarrow_2 Y'$
 mit $|\text{Vis}(Y' \setminus Y)| \leq 1$ zu betrachten.

Beweis:

[Gla/Go]

vollständige Induktion nach $n = |\text{Vis}(X' \setminus X)| \in \mathbb{N}_0$. //

SATZ 10.22

Die Relationen $\approx_{ib}, \approx_{sb}, \approx_{pwb}, \approx_{pb}$ und \approx_{hb} sind Äquivalenzrelationen.

Beweis:

analog §2

§11 Trace-Äquivalenzen

Schwächere Äquivalenzrelationen als die verschiedenen Bisimulationen ergeben sich, wenn man bei zwei Ereignisstrukturen nur die möglichen Ausführungen des Systems vergleicht, also zum Beispiel im „Interleaving“-Fall die Folgen von sichtbaren Aktionen, die die Ereignisstrukturen ausführen können.

DEFINITION 11.1

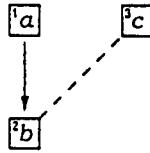
[Gla/Go]

Es sei $\mathcal{E} = (E, \prec, \#, l)$ eine Ereignisstruktur. Man definiert die *Interleaving Traces*:

$$\text{seq traces}(\mathcal{E}) := \left\{ \omega \in \text{Vis}^* \mid \exists X \in \text{Conf}(\mathcal{E}): \emptyset \xrightarrow{\omega} X \right\}$$

BEISPIEL 11.2

Man betrachte die folgende prime Ereignisstruktur $\mathcal{E} = (E, \prec, \#, l)$:



$\mathcal{E} = (E, \prec, \#, l)$ mit

$E = \{e_1, e_2, e_3\}$

$\prec = \{(e_1, e_2)\}$

$\# = \{(e_2, e_3), (e_3, e_2)\}$

$l = \{(e_1, a), (e_2, b), (e_3, c)\}$

Die Konfigurationen von \mathcal{E} sind:

$$\text{Conf}(\mathcal{E}) = \left\{ \emptyset, \underbrace{\{e_1\}}_{x_0}, \underbrace{\{e_3\}}_{x_1}, \underbrace{\{e_1, e_2\}}_{x_2}, \underbrace{\{e_1, e_3\}}_{x_4} \right\}$$

Die Interleaving Traces sind:

$$\text{seq traces}(\mathcal{E}) = \{\epsilon, a, c, ab, ac, ca\}$$

DEFINITION 11.3

[Gla/Go]

Zwei Ereignisstrukturen $\mathcal{E}_1 = (E_1, \prec_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, \prec_2, \#_2, l_2)$ heißen *interleaving trace-äquivalent* (geschrieben $\mathcal{E}_1 \approx_{it} \mathcal{E}_2$), wenn gilt: $\text{seq traces}(\mathcal{E}_1) = \text{seq traces}(\mathcal{E}_2)$.

LEMMA 11.4

[Gla/Go]

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, \prec_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, \prec_2, \#_2, l_2)$ Ereignisstrukturen mit $\mathcal{E}_1 \approx_{it} \mathcal{E}_2$. Dann gilt $\mathcal{E}_1 \approx_{it} \mathcal{E}_2$.

Beweis:

[Gla/Go]

Mit vollständiger Induktion nach $n = |\omega| \in \mathbb{N}_0$ folgt aus Definition 10.1:

$$\emptyset \xrightarrow{\omega}_1 X \in \text{Conf}(\mathcal{E}_1) \Rightarrow \exists Y \in \text{Conf}(\mathcal{E}_2): \emptyset \xrightarrow{\omega}_2 Y$$

und damit aus Symmetriegründen $\mathcal{E}_1 \approx_{it} \mathcal{E}_2$. //

Wie im Fall der Step-Bisimulation erhält man auch hier eine feinere Äquivalenzrelation, wenn man statt Folgen von Aktionen Folgen von Steps vergleicht.

DEFINITION 11.5

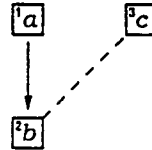
[Gla/Go]

Es sei $\mathcal{E} = (E, \prec, \#, l)$ eine Ereignisstruktur. Man definiert die *Step Traces*:

$$\text{step traces}(\mathcal{E}) := \left\{ W \in (\mathbb{N}_0^{\text{vis}})^* \mid \exists X \in \text{Conf}(\mathcal{E}): \emptyset \xrightarrow{W} X \right\}$$

BEISPIEL 11.6

Man betrachte wieder die prime Ereignisstruktur $\mathcal{E} = (E, \prec, \#, l)$ aus Beispiel 11.2:



Die Step Traces sind:

$$\text{step traces}(\mathcal{E}) = \{\varepsilon, \{a\}, \{c\}, \{a\}\{b\}, \{a\}\{c\}, \{c\}\{a\}, \{a, c\}\}$$

DEFINITION 11.7

[Gla/Go]

Zwei Ereignisstrukturen $\mathcal{E}_1 = (E_1, \prec_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, \prec_2, \#_2, l_2)$ heißen *step trace-äquivalent* (geschrieben $\mathcal{E}_1 \approx_{st} \mathcal{E}_2$), wenn gilt: $\text{step traces}(\mathcal{E}_1) = \text{step traces}(\mathcal{E}_2)$.

BEISPIEL 11.8

[Gla/Go]

Die primen Ereignisstrukturen $\mathcal{E}_1 = (E_1, \prec_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, \prec_2, \#_2, l_2)$ aus Beispiel 10.5 sind interleaving-bisimilar, aber nicht step trace-äquivalent:



Beweis:

[Gla/Go]

Die Konfigurationen von \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 sind:

$$\text{Conf}(\mathcal{E}_1) = \left\{ \emptyset, \underbrace{\{e_1\}}_{X_0}, \underbrace{\{e_2\}}_{X_1}, \underbrace{\{e_1, e_2\}}_{X_2} \right\}$$

$$\text{Conf}(\mathcal{E}_2) = \left\{ \emptyset, \underbrace{\{e_1\}}_{Y_0}, \underbrace{\{e_2\}}_{Y_1}, \underbrace{\{e_1, e_3\}}_{Y_2}, \underbrace{\{e_2, e_4\}}_{Y_3} \right\}$$

In Beispiel 10.5 wurde schon gezeigt: $\mathcal{E}_1 \approx_{ib} \mathcal{E}_2$.

Es gilt $\{a, b\} \in \text{step traces}(\mathcal{E}_1)$ aber $\{a, b\} \notin \text{step traces}(\mathcal{E}_2)$, also gilt $\mathcal{E}_1 \not\approx_{st} \mathcal{E}_2$.

SATZ 11.9

[Gla/Go]

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, \prec_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, \prec_2, \#_2, l_2)$ Ereignisstrukturen mit $\mathcal{E}_1 \approx_{st} \mathcal{E}_2$. Dann gilt $\mathcal{E}_1 \approx_u \mathcal{E}_2$.

Beweis:

[Gla/Go]

Für jedes $\omega = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \text{Vis}^*$ gilt auch $\omega \in (\mathbb{N}_0^{\text{Vis}})^*$,
und jedes $\alpha_i \in \text{Vis}$ ist auch ein Step. //

LEMMA 11.10

[Gla/Go]

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, \prec_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, \prec_2, \#_2, l_2)$ Ereignisstrukturen mit $\mathcal{E}_1 \approx_{sb} \mathcal{E}_2$.
Dann gilt $\mathcal{E}_1 \approx_{st} \mathcal{E}_2$.

Beweis:

[Gla/Go]

Mit vollständiger Induktion nach $n = |W| \in \mathbb{N}_0$ für $W \in (\mathbb{N}_0^{\text{Vis}})^*$ folgt aus
Definition 10.3: $\emptyset \xrightarrow{W}_1 X \in \text{Conf}(\mathcal{E}_1) \Rightarrow \exists Y \in \text{Conf}(\mathcal{E}_2): \emptyset \xrightarrow{W}_2 Y$
und damit aus Symmetriegründen $\mathcal{E}_1 \approx_{st} \mathcal{E}_2$. //

Es folgt eine Trace-Äquivalenz analog der Definition der Partial Word-Bisimulation.

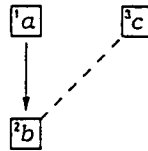
DEFINITION 11.11

Es sei $\mathcal{E} = (E, \prec, \#, l)$ eine Ereignisstruktur. Man definiert die *Partial Word Traces*:

$$\text{part traces}(\mathcal{E}) := \{p \in \mathbb{P} \mid \exists p' \in \text{pomsets}(\mathcal{E}): p' \leq p\}$$

BEISPIEL 11.12

Man betrachte wieder die prime Ereignisstruktur $\mathcal{E} = (E, \prec, \#, l)$ aus Beispiel 11.2:



Die Pomsets sind zunächst:

$$\text{pomsets}(\mathcal{E}) = \{[\emptyset], [a], [c], [a] \rightarrow [b], [a] \quad [c]\}$$

und damit sind die Partial Word Traces:

$$\text{part traces}(\mathcal{E}) = \{[\emptyset], [a], [c], [a] \rightarrow [b], [a] \quad [c], [a] \rightarrow [c], [a] \leftarrow [c]\}$$

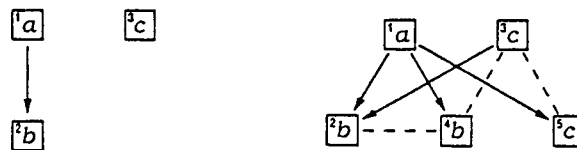
DEFINITION 11.13

Zwei Ereignisstrukturen $\mathcal{E}_1 = (E_1, \prec_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, \prec_2, \#_2, l_2)$ heißen *partial word trace-äquivalent* (geschrieben $\mathcal{E}_1 \approx_{pwt} \mathcal{E}_2$),
wenn gilt: $\text{part traces}(\mathcal{E}_1) = \text{part traces}(\mathcal{E}_2)$.

BEISPIEL 11.14

[Vogler]

Die primen Ereignisstrukturen $\mathcal{E}_1 = (E_1, \prec_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, \prec_2, \#_2, l_2)$ aus
Beispiel 10.8 sind step-bisimilar, aber nicht partial word trace-äquivalent:



Beweis:

Die Konfigurationen von \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 sind:

$$\text{Conf}(\mathcal{E}_1) = \left\{ \underbrace{\emptyset}_{X_0}, \underbrace{\{e_1\}}_{X_1}, \underbrace{\{e_3\}}_{X_2}, \underbrace{\{e_1, e_2\}}_{X_3}, \underbrace{\{e_1, e_3\}}_{X_4}, \underbrace{\{e_1, e_2, e_3\}}_{X_5} \right\}$$

$$\text{Conf}(\mathcal{E}_2) = \left\{ \underbrace{\emptyset}_{Y_0}, \underbrace{\{e_1\}}_{Y_1}, \underbrace{\{e_3\}}_{Y_2}, \underbrace{\{e_1, e_3\}}_{Y_3}, \underbrace{\{e_1, e_4\}}_{Y_4}, \underbrace{\{e_1, e_5\}}_{Y_5}, \underbrace{\{e_1, e_2, e_3\}}_{Y_6}, \underbrace{\{e_1, e_4, e_5\}}_{Y_7} \right\}$$

In Beispiel 10.8 wurde schon gezeigt: $\mathcal{E}_1 \approx_{sb} \mathcal{E}_2$.

Weder das Pomset

$$[\text{Vis}(Y_6)] = \begin{array}{c} \boxed{a} \\ \boxed{c} \end{array} \rightarrow \boxed{b}$$

noch das Pomset

$$[\text{Vis}(Y_7)] = \boxed{a} \begin{array}{c} \rightarrow \boxed{b} \\ \rightarrow \boxed{c} \end{array}$$

ist schwächer sequentiell als das Pomset $[\text{Vis}(X_5)] = \boxed{a} \longrightarrow \boxed{b} \quad \boxed{c}$,
und damit gilt $\mathcal{E}_1 \neq_{pwt} \mathcal{E}_2$.

SATZ 11.15

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, \prec_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, \prec_2, \#_2, l_2)$ Ereignisstrukturen mit $\mathcal{E}_1 \approx_{pwt} \mathcal{E}_2$.
Dann gilt $\mathcal{E}_1 \approx_{st} \mathcal{E}_2$.

Beweis:

Es gelte $\emptyset \xrightarrow{W}_1 X \in \text{Conf}(\mathcal{E}_1)$ für ein $W \in (\mathbb{N}_0^{\text{Vis}})^*$, dann existiert ein
 $Y \in \text{Conf}(\mathcal{E}_2)$, wobei $[\text{Vis}(Y)]$ schwächer sequentiell als $[\text{Vis}(X)]$ ist.

Daraus folgt aber sofort $\emptyset \xrightarrow{W}_2 Y$ und aus Symmetriegründen $\mathcal{E}_1 \approx_{st} \mathcal{E}_2$. //

LEMMA 11.16

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, \prec_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, \prec_2, \#_2, l_2)$ Ereignisstrukturen
mit $\mathcal{E}_1 \approx_{pwb} \mathcal{E}_2$. Dann gilt $\mathcal{E}_1 \approx_{pwt} \mathcal{E}_2$.

Beweis:

Folgt unmittelbar aus Definition 10.7. //

Schließlich folgt eine Trace-Äquivalenz mit den Pomsets zweier Ereignisstrukturen.
Dies ist die stärkste der Trace-Äquivalenzen.

DEFINITION 11.17

[Gla/Go]

Zwei Ereignisstrukturen $\mathcal{E}_1 = (E_1, \prec_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, \prec_2, \#_2, l_2)$ heißen
pomset trace-äquivalent (geschrieben $\mathcal{E}_1 \approx_{pt} \mathcal{E}_2$),
wenn gilt: $\text{pomsets}(\mathcal{E}_1) = \text{pomsets}(\mathcal{E}_2)$.

BEISPIEL 11.18

[Vogler]

Die primen Ereignisstrukturen $\mathcal{E}_1 = (E_1, <_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, <_2, \#_2, l_2)$ aus Beispiel 10.11 sind partial word-bisimilar, aber nicht pomset trace-äquivalent:



Beweis:

Die Konfigurationen von \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 sind:

$$\text{Conf}(\mathcal{E}_1) = \left\{ \emptyset, \underbrace{\{e_1\}}_{x_0}, \underbrace{\{e_2\}}_{x_1}, \underbrace{\{e_1, e_2\}}_{x_2} \right\}$$

$$\text{Conf}(\mathcal{E}_2) = \left\{ \emptyset, \underbrace{\{e_1\}}_{y_0}, \underbrace{\{e_2\}}_{y_1}, \underbrace{\{e_1, e_2\}}_{y_2}, \underbrace{\{e_2, e_3\}}_{y_3} \right\}$$

In Beispiel 10.11 wurde schon gezeigt: $\mathcal{E}_1 \approx_{pw} \mathcal{E}_2$.

Das Pomset $[\text{Vis}(Y_4)] = [b] \rightarrow [a]$ ist nicht gleich dem Pomset

$[\text{Vis}(X_3)] = [a] \quad [b]$, und damit gilt $\mathcal{E}_1 \not\approx_{pt} \mathcal{E}_2$.

SATZ 11.19

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, <_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, <_2, \#_2, l_2)$ Ereignisstrukturen mit $\mathcal{E}_1 \approx_{pt} \mathcal{E}_2$. Dann gilt $\mathcal{E}_1 \approx_{pw} \mathcal{E}_2$.

Beweis:

Für alle Pomsets $p \in \mathbb{P}$ gilt sofort $p \leq p$. //

LEMMA 11.20

[Gla/Go]

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, <_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, <_2, \#_2, l_2)$ Ereignisstrukturen mit $\mathcal{E}_1 \approx_{pb} \mathcal{E}_2$. Dann gilt $\mathcal{E}_1 \approx_{pt} \mathcal{E}_2$.

Beweis:

[Gla/Go]

Folgt unmittelbar aus Definition 10.10. //

BEISPIEL 11.21

[Gla/Go]

Die folgenden primen Ereignisstrukturen $\mathcal{E}_1 = (E_1, <_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, <_2, \#_2, l_2)$ sind pomset trace-äquivalent, aber nicht interleaving-bisimilar:



$$E_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$$

$$<_1 = \{(e_1, e_2), (e_1, e_3)\}$$

$$\#_1 = \{(e_2, e_3), (e_3, e_2)\}$$

$$l_1 = \{(e_1, a), (e_2, b), (e_3, c)\}$$

$$E_2 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

$$<_2 = \{(e_1, e_2), (e_4, e_3)\}$$

$$\#_2 = \{(e_1, e_3), (e_1, e_4), (e_2, e_3), (e_2, e_4), (e_3, e_1), (e_3, e_2), (e_4, e_1), (e_4, e_2)\}$$

$$I_2 = \{(e_1, a), (e_2, b), (e_3, c), (e_4, a)\}$$

Beweis:

Die Konfigurationen von \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 sind:

$$\text{Conf}(\mathcal{E}_1) = \left\{ \underbrace{\emptyset}_{X_0}, \underbrace{\{e_1\}}_{X_1}, \underbrace{\{e_1, e_2\}}_{X_2}, \underbrace{\{e_1, e_3\}}_{X_3} \right\}$$

$$\text{Conf}(\mathcal{E}_2) = \left\{ \underbrace{\emptyset}_{Y_0}, \underbrace{\{e_1\}}_{Y_1}, \underbrace{\{e_4\}}_{Y_2}, \underbrace{\{e_1, e_2\}}_{Y_3}, \underbrace{\{e_3, e_4\}}_{Y_4} \right\}$$

Offensichtlich gilt:

$$\text{pomsets}(\mathcal{E}_1) = \{[\emptyset], [\boxed{a}], [\boxed{a} \longrightarrow \boxed{b}], [\boxed{a} \longrightarrow \boxed{c}]\} = \text{pomsets}(\mathcal{E}_2)$$

und damit $\mathcal{E}_1 \approx_{pt} \mathcal{E}_2$.

Angenommen, es existiert eine Interleaving-Bisimulation B .

Wegen $Y_0 \xrightarrow{a} Y_1$ muß gelten $(X_1, Y_1) \in B$.

Es gilt aber $X_1 \xrightarrow{c} X_3$ und $Y_1 \not\xrightarrow{c} Y_2$, also $\mathcal{E}_1 \not\approx_{ib} \mathcal{E}_2$.

§12 ST-Bisimulationen

In allen bisherigen Äquivalenzrelationen wurden die Aktionen als „atomar“ betrachtet, also bei jedem Ereignis unterstellt, daß es zu einem beliebigen Zeitpunkt entweder eingetreten oder nicht eingetreten ist.

Betrachtet man aber Aktionen als nicht atomar, dann kann ein Ereignis einen dritten Status haben: Das Ereignis hat zu einem Zeitpunkt begonnen, ist aber noch nicht abgeschlossen. Man sagt in diesem Fall, das Ereignis ist „aktiv“.

Aktive Ereignisse müssen immer sichtbare Aktionen tragen. Weiter kann kein Ereignis eintreten oder aktiv werden, solange ein (durch die Fluß- oder die Kausalrelation) notwendiges anderes Ereignis zwar aktiv, aber noch nicht beendet ist.

DEFINITION 12.1

[Vogler]

Es sei $\mathcal{E} = (E, <, \#, 1)$ eine Ereignisstruktur.

Ein Paar $(X, P) \subseteq \text{Conf}(\mathcal{E}) \times \text{Conf}(\mathcal{E})$ heißt *ST-Konfiguration* von \mathcal{E} , wenn $P \subseteq X$ gilt und für alle $e, e' \in X$ gilt: $1(e') = \tau$ oder $(e' <_X e \Rightarrow e' \in P)$.

Die Menge der ST-Konfigurationen von \mathcal{E} heißt $\text{STConf}(\mathcal{E})$.

BEMERKUNG 12.2

[Vogler]

Ein Paar $(X, P) \subseteq \text{Conf}(\mathcal{E}) \times \text{Conf}(\mathcal{E})$ mit $P \subseteq X$ ist offenbar genau dann ST-Konfiguration, wenn $\text{Vis}(X \setminus P) = X \setminus P$ gilt und alle $e \in X \setminus P$ maximal in X sind. Die Elemente aus $X \setminus P$ werden *aktive* Ereignisse genannt.

Konsequenterweise fordert man nun bei Bisimulationen, daß aktive Ereignisse in einer Ereignisstruktur auch wieder nur auf aktive Ereignisse der jeweils anderen Ereignisstruktur abgebildet werden. Damit erhält man eine Reihe von feineren Bisimulationen, die sogenannten ST-Bisimulationen.

Der einfachste Ansatz erfolgt auch hier scheinbar analog den Interleaving-Äquivalenzen. Der Begriff „Interleaving“ bezieht sich auf die Ähnlichkeit zur Formulierung in Lemma 10.2, es wird sich allerdings am Ende des Kapitels zeigen, daß diese Bisimulation sogar stärker als die Step-Bisimulation ist.

DEFINITION 12.3

[Vogler]

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, <_1, \#_1, 1_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, <_2, \#_2, 1_2)$ Ereignisstrukturen.

Eine Relation $B \subseteq \text{STConf}(\mathcal{E}_1) \times \text{STConf}(\mathcal{E}_2) \times (E_1 \rightarrow E_2)$

mit $((\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \emptyset), \emptyset) \in B$ heißt *Interleaving-ST-Bisimulation* für \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 ,

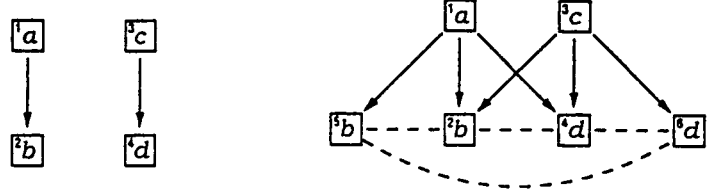
wenn für alle $((X, P), (Y, Q), f) \in B$ gilt:

- o) $f: \text{Vis}(X) \rightarrow \text{Vis}(Y)$ ist markierungserhaltende Bijektion mit $f(\text{Vis}(P)) = \text{Vis}(Q)$
- i) $(X, P) \Longrightarrow_1 (X', P') \in \text{STConf}(\mathcal{E}_1) \Rightarrow \exists (Y', Q') \in \text{STConf}(\mathcal{E}_2), f' \in E_1 \rightarrow E_2$
mit $(Y, Q) \Longrightarrow_2 (Y', Q'), f'|_{\text{Vis}(X)} = f$ und $((X', P'), (Y', Q'), f') \in B$
- ii) $(Y, Q) \Longrightarrow_2 (Y', Q') \in \text{STConf}(\mathcal{E}_2) \Rightarrow \exists (X', P') \in \text{STConf}(\mathcal{E}_1), f' \in E_1 \rightarrow E_2$
mit $(X, P) \Longrightarrow_1 (X', P'), f'|_{\text{Vis}(X)} = f$ und $((X', P'), (Y', Q'), f') \in B$

Man definiert $\mathcal{E}_1 \approx_{\text{bST}} \mathcal{E}_2 \Leftrightarrow \exists B$ Interleaving-ST-Bisimulation für \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 ,
 B heißt dann Interleaving-ST-Bisimulation für $\mathcal{E}_1 \approx_{\text{bST}} \mathcal{E}_2$
 und man schreibt dafür auch $\mathcal{E}_1 \stackrel{B}{\approx}_{\text{bST}} \mathcal{E}_2$.

BEISPIEL 12.4

Die folgenden primen Ereignisstrukturen $\mathcal{E}_1 = (E_1, <_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, <_2, \#_2, l_2)$
 sind interleaving-ST-bisimilar, aber nicht partial word trace-äquivalent:



$$E_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

$$<_1 = \{(e_1, e_2), (e_3, e_4)\}$$

$$\#_1 = \emptyset$$

$$l_1 = \{(e_1, a), (e_2, b), (e_3, c), (e_4, d)\}$$

$$E_2 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$$

$$<_2 = \{(e_1, e_2), (e_1, e_4), (e_1, e_5), (e_3, e_2), (e_3, e_4), (e_3, e_6)\}$$

$$\#_2 = \{(e_2, e_4), (e_2, e_5), (e_4, e_2), (e_4, e_6), (e_5, e_2), (e_5, e_6), (e_6, e_4), (e_6, e_5)\}$$

$$l_2 = \{(e_1, a), (e_2, b), (e_3, c), (e_4, d), (e_5, b), (e_6, d)\}$$

Beweis:

Die Konfigurationen von \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 sind:

$$\begin{aligned} \text{Conf}(\mathcal{E}_1) = & \left\{ \underbrace{\emptyset}_{X_0}, \underbrace{\{e_1\}}_{X_1}, \underbrace{\{e_3\}}_{X_2}, \underbrace{\{e_1, e_2\}}_{X_3}, \underbrace{\{e_1, e_3\}}_{X_4}, \underbrace{\{e_3, e_4\}}_{X_5}, \right. \\ & \left. \underbrace{\{e_1, e_2, e_3\}}_{X_6}, \underbrace{\{e_1, e_3, e_4\}}_{X_7}, \underbrace{\{e_1, e_2, e_3, e_4\}}_{X_8} \right\} \\ \text{Conf}(\mathcal{E}_2) = & \left\{ \underbrace{\emptyset}_{Y_0}, \underbrace{\{e_1\}}_{Y_1}, \underbrace{\{e_3\}}_{Y_2}, \underbrace{\{e_1, e_3\}}_{Y_3}, \underbrace{\{e_1, e_5\}}_{Y_4}, \underbrace{\{e_3, e_6\}}_{Y_5}, \underbrace{\{e_1, e_2, e_3\}}_{Y_6}, \underbrace{\{e_1, e_3, e_4\}}_{Y_7}, \right. \\ & \left. \underbrace{\{e_1, e_3, e_5\}}_{Y_8}, \underbrace{\{e_1, e_3, e_6\}}_{Y_9}, \underbrace{\{e_1, e_2, e_3, e_6\}}_{Y_{10}}, \underbrace{\{e_1, e_3, e_4, e_5\}}_{Y_{11}} \right\} \end{aligned}$$

$$\text{Weder } [\text{Vis}(Y_{10} \setminus Y_0)] = \begin{array}{c} \boxed{a} \longrightarrow \boxed{b} \\ \searrow \boxed{d} \longrightarrow \boxed{c} \end{array}$$

$$\text{noch } [\text{Vis}(Y_{11} \setminus Y_0)] = \begin{array}{c} \boxed{b} \\ \boxed{a} \longrightarrow \searrow \boxed{d} \longleftarrow \boxed{c} \end{array}$$

ist schwächer sequentiell als $[\text{Vis}(X_8 \setminus X_0)] = \boxed{a} \longrightarrow \boxed{b} \quad \boxed{d} \longleftarrow \boxed{c}$,
 also gilt $\mathcal{E}_1 \neq_{\text{pwt}} \mathcal{E}_2$.

Die folgende Relation ist eine Interleaving-ST-Bisimulation, also gilt $\mathcal{E}_1 \approx_{\text{ibST}} \mathcal{E}_2$:

$$B = \{((X_0, X_0), (Y_0, Y_0), \emptyset), \\ ((X_1, X_1), (Y_1, Y_1), \{(e_1, e_1)\}), \\ ((X_2, X_2), (Y_2, Y_2), \{(e_3, e_3)\}), \\ ((X_3, X_3), (Y_4, Y_4), \{(e_1, e_1), (e_2, e_5)\}), \\ ((X_4, X_4), (Y_3, Y_3), \{(e_1, e_1), (e_3, e_3)\}), \\ ((X_5, X_5), (Y_5, Y_5), \{(e_3, e_3), (e_4, e_6)\}), \\ ((X_6, X_6), (Y_6, Y_6), \{(e_1, e_1), (e_2, e_2), (e_3, e_3)\}), \\ ((X_6, X_6), (Y_8, Y_8), \{(e_1, e_1), (e_2, e_5), (e_3, e_3)\}), \\ ((X_7, X_7), (Y_7, Y_7), \{(e_1, e_1), (e_3, e_3), (e_4, e_4)\}), \\ ((X_7, X_7), (Y_9, Y_9), \{(e_1, e_1), (e_3, e_3), (e_4, e_6)\}), \\ ((X_8, X_8), (Y_{10}, Y_{10}), \{(e_1, e_1), (e_2, e_2), (e_3, e_3), (e_4, e_6)\}), \\ ((X_8, X_8), (Y_{11}, Y_{11}), \{(e_1, e_1), (e_2, e_5), (e_3, e_3), (e_4, e_4)\}), \\ ((X_1, X_0), (Y_1, Y_0), \{(e_1, e_1)\}), \\ ((X_2, X_0), (Y_2, Y_0), \{(e_3, e_3)\}), \\ ((X_3, X_1), (Y_4, Y_1), \{(e_1, e_1), (e_2, e_5)\}), \\ ((X_4, X_0), (Y_3, Y_0), \{(e_1, e_1), (e_3, e_3)\}), \\ ((X_4, X_1), (Y_3, Y_1), \{(e_1, e_1), (e_3, e_3)\}), \\ ((X_4, X_2), (Y_3, Y_2), \{(e_1, e_1), (e_3, e_3)\}), \\ ((X_5, X_2), (Y_5, Y_2), \{(e_3, e_3), (e_4, e_6)\}), \\ ((X_6, X_1), (Y_8, Y_1), \{(e_1, e_1), (e_2, e_5), (e_3, e_3)\}), \\ ((X_6, X_3), (Y_8, Y_4), \{(e_1, e_1), (e_2, e_5), (e_3, e_3)\}), \\ ((X_6, X_4), (Y_6, Y_3), \{(e_1, e_1), (e_2, e_2), (e_3, e_3)\}), \\ ((X_6, X_4), (Y_8, Y_3), \{(e_1, e_1), (e_2, e_5), (e_3, e_3)\}), \\ ((X_7, X_2), (Y_9, Y_2), \{(e_1, e_1), (e_3, e_3), (e_4, e_6)\}), \\ ((X_7, X_4), (Y_7, Y_3), \{(e_1, e_1), (e_3, e_3), (e_4, e_4)\}), \\ ((X_7, X_4), (Y_9, Y_3), \{(e_1, e_1), (e_3, e_3), (e_4, e_6)\}), \\ ((X_7, X_5), (Y_9, Y_5), \{(e_1, e_1), (e_3, e_3), (e_4, e_6)\}), \\ ((X_8, X_4), (Y_{10}, Y_3), \{(e_1, e_1), (e_2, e_2), (e_3, e_3), (e_4, e_6)\}), \\ ((X_8, X_4), (Y_{11}, Y_3), \{(e_1, e_1), (e_2, e_5), (e_3, e_3), (e_4, e_4)\}), \\ ((X_8, X_6), (Y_{10}, Y_6), \{(e_1, e_1), (e_2, e_2), (e_3, e_3), (e_4, e_6)\}), \\ ((X_8, X_6), (Y_{11}, Y_8), \{(e_1, e_1), (e_2, e_5), (e_3, e_3), (e_4, e_4)\}), \\ ((X_8, X_7), (Y_{10}, Y_9), \{(e_1, e_1), (e_2, e_2), (e_3, e_3), (e_4, e_6)\}), \\ ((X_8, X_7), (Y_{11}, Y_7), \{(e_1, e_1), (e_2, e_5), (e_3, e_3), (e_4, e_4)\})\}$$

LEMMA 12.5

[Vogler]

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, \prec_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, \prec_2, \#_2, l_2)$ Ereignisstrukturen mit $\mathcal{E}_1 \approx_{\text{ibST}} \mathcal{E}_2$. Dann gilt $\mathcal{E}_1 \approx_{\text{ib}} \mathcal{E}_2$.

Beweis:

[Vogler]

Offensichtlich gilt $X \in \text{Conf}(\mathcal{E}) \Leftrightarrow (X, X) \in \text{STConf}(\mathcal{E})$.

Deshalb ist $(X, Y, f) \in B_{\text{ib}} \Leftrightarrow ((X, X), (Y, Y), f) \in B_{\text{ibST}}$

die benötigte Bisimulation gemäß Lemma 10.18. //

Es folgt nun eine ST-Bisimulation analog der Partial Word-Bisimulation:

DEFINITION 12.6

[Vogler]

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, <_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, <_2, \#_2, l_2)$ Ereignisstrukturen.

Eine Relation $B \subseteq STConf(\mathcal{E}_1) \times STConf(\mathcal{E}_2) \times (E_1 \rightarrow E_2)$

mit $((\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \emptyset), \emptyset) \in B$ heißt *Partial Word-ST-Bisimulation* für \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 ,

wenn für alle $((X, P), (Y, Q), f) \in B$ gilt:

- o) $f: Vis(X) \rightarrow Vis(Y)$ ist markierungserhaltende Bijektion mit $f(Vis(P)) = Vis(Q)$
- i) $(X, P) \Longrightarrow_1 (X', P') \in STConf(\mathcal{E}_1) \Rightarrow \exists (Y', Q') \in STConf(\mathcal{E}_2), f' \in E_1 \rightarrow E_2$
mit $(Y, Q) \Longrightarrow_2 (Y', Q'), f'|_{Vis(X)} = f$ und $((X', P'), (Y', Q'), f') \in B$
und $f'^{-1}|_{Vis(Y \setminus Q)}: Vis(X' \setminus P) \rightarrow Vis(Y' \setminus Q)$ ist Homomorphismus.
- ii) $(Y, Q) \Longrightarrow_2 (Y', Q') \in STConf(\mathcal{E}_2) \Rightarrow \exists (X', P') \in STConf(\mathcal{E}_1), f' \in E_1 \rightarrow E_2$
mit $(X, P) \Longrightarrow_1 (X', P'), f'|_{Vis(X)} = f$ und $((X', P'), (Y', Q'), f') \in B$
und $f'|_{Vis(X' \setminus P)}: Vis(X' \setminus P) \rightarrow Vis(Y' \setminus Q)$ ist Homomorphismus.

Man definiert $\mathcal{E}_1 \approx_{pwST} \mathcal{E}_2 \Leftrightarrow \exists B$ Partial Word-ST-Bisimulation für \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 ,

B heißt dann Partial Word-ST-Bisimulation für $\mathcal{E}_1 \approx_{pwST} \mathcal{E}_2$,

und man schreibt dafür auch $\mathcal{E}_1 \stackrel{B}{\approx}_{pwST} \mathcal{E}_2$.

BEISPIEL 12.7

[Vogler]

Die folgenden primen Ereignisstrukturen $\mathcal{E}_1 = (E_1, <_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, <_2, \#_2, l_2)$ aus Beispiel 10.11 sind partial word-ST-bisimilar, aber nicht pomset trace-äquivalent:



Beweis:

Die Konfigurationen von \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 sind:

$$Conf(\mathcal{E}_1) = \left\{ \emptyset, \underbrace{\{e_1\}}_{X_0}, \underbrace{\{e_2\}}_{X_1}, \underbrace{\{e_1, e_2\}}_{X_2} \right\}$$

$$Conf(\mathcal{E}_2) = \left\{ \emptyset, \underbrace{\{e_1\}}_{Y_0}, \underbrace{\{e_2\}}_{Y_1}, \underbrace{\{e_1, e_2\}}_{Y_2}, \underbrace{\{e_2, e_3\}}_{Y_3} \right\}$$

Nach Beispiel 11.18 gilt bereits $\mathcal{E}_1 \neq_{pt} \mathcal{E}_2$.

Die folgende Relation ist eine Partial Word-ST-Bisimulation:

$$B = \{ ((X_0, X_0), (Y_0, Y_0), \emptyset), \\ ((X_1, X_1), (Y_1, Y_1), \{(e_1, e_1)\}), \\ ((X_2, X_2), (Y_2, Y_2), \{(e_2, e_2)\}), \\ ((X_3, X_3), (Y_3, Y_3), \{(e_1, e_1), (e_2, e_2)\}), \\ ((X_1, X_0), (Y_1, Y_0), \{(e_1, e_1)\}), \}$$

$$\begin{aligned}
 & ((X_2, X_0), (Y_2, Y_0), \{(e_2, e_2)\}), \\
 & ((X_3, X_0), (Y_3, Y_0), \{(e_1, e_1), (e_2, e_2)\}), \\
 & ((X_3, X_1), (Y_3, Y_1), \{(e_1, e_1), (e_2, e_2)\}), \\
 & ((X_3, X_2), (Y_3, Y_2), \{(e_1, e_1), (e_2, e_2)\}), \\
 & ((X_3, X_3), (Y_4, Y_4), \{(e_1, e_3), (e_2, e_2)\}), \\
 & ((X_3, X_2), (Y_4, Y_2), \{(e_1, e_3), (e_2, e_2)\})
 \end{aligned}$$

Also gilt $\mathcal{E}_1 \approx_{pwST} \mathcal{E}_2$.

SATZ 12.8

[Vogler]

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, <_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, <_2, \#_2, l_2)$ Ereignisstrukturen mit $\mathcal{E}_1 \approx_{pwST} \mathcal{E}_2$. Dann gilt $\mathcal{E}_1 \approx_{ibST} \mathcal{E}_2$.

Beweis:

klar

SATZ 12.9

[Vogler]

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, <_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, <_2, \#_2, l_2)$ Ereignisstrukturen mit $\mathcal{E}_1 \approx_{pwST} \mathcal{E}_2$. Dann gilt $\mathcal{E}_1 \approx_{pwb} \mathcal{E}_2$.

Beweis:

[Vogler]

Offensichtlich gilt $X \in Conf(\mathcal{E}) \Leftrightarrow (X, X) \in STConf(\mathcal{E})$.
 Deshalb ist $(X, Y, f) \in B_{pwb} \Leftrightarrow ((X, X), (Y, Y), f) \in B_{pwST}$
 die benötigte Bisimulation gemäß Lemma 10.20. //

Als nächstes folgt eine ST-Bisimulation analog der Pomset-Bisimulation:

DEFINITION 12.10

[Vogler]

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, <_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, <_2, \#_2, l_2)$ Ereignisstrukturen.
 Eine Relation $B \subseteq STConf(\mathcal{E}_1) \times STConf(\mathcal{E}_2) \times (E_1 \rightarrow E_2)$
 mit $((\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \emptyset), \emptyset) \in B$ heißt *Pomset-ST-Bisimulation* für \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 ,
 wenn für alle $((X, P), (Y, Q), f) \in B$ gilt:

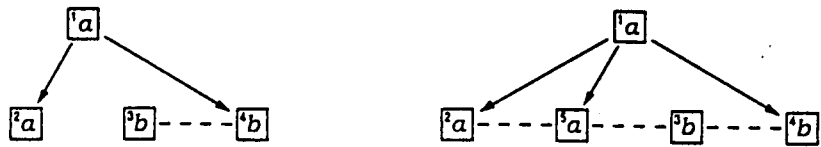
- o) $f: Vis(X) \rightarrow Vis(Y)$ ist markierungserhaltende Bijektion mit $f(Vis(P)) = Vis(Q)$
- i) $(X, P) \xrightarrow{1} (X', P') \in STConf(\mathcal{E}_1) \Rightarrow \exists (Y', Q') \in STConf(\mathcal{E}_2), f' \in E_1 \rightarrow E_2$
 mit $(Y, Q) \xrightarrow{2} (Y', Q'), f'|_{Vis(X)} = f$ und $((X', P'), (Y', Q'), f') \in B$
 und $f'|_{Vis(X' \setminus P)}: Vis(X' \setminus P) \rightarrow Vis(Y' \setminus Q)$ ist Isomorphismus.
- ii) $(Y, Q) \xrightarrow{2} (Y', Q') \in STConf(\mathcal{E}_2) \Rightarrow \exists (X', P') \in STConf(\mathcal{E}_1), f' \in E_1 \rightarrow E_2$
 mit $(X, P) \xrightarrow{1} (X', P'), f'|_{Vis(X)} = f$ und $((X', P'), (Y', Q'), f') \in B$
 und $f'|_{Vis(X' \setminus P)}: Vis(X' \setminus P) \rightarrow Vis(Y' \setminus Q)$ ist Isomorphismus.

Man definiert $\mathcal{E}_1 \approx_{pbST} \mathcal{E}_2 \Leftrightarrow \exists B$ Pomset-ST-Bisimulation für \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 ,
 B heißt dann Pomset-ST-Bisimulation für $\mathcal{E}_1 \approx_{pbST} \mathcal{E}_2$,
 und man schreibt dafür auch $\mathcal{E}_1 \stackrel{B}{\approx}_{pbST} \mathcal{E}_2$.

BEISPIEL 12.11

[Vogler]

Die folgenden primen Ereignisstrukturen $\mathcal{E}_1 = (E_1, <_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, <_2, \#_2, l_2)$ sind pomset-ST-bisimilar, aber nicht history preserving-bisimilar:



$$\begin{aligned}
 E_1 &= \{e_1, e_2, e_3, e_4\} \\
 <_1 &= \{(e_1, e_2), (e_1, e_4)\} \\
 \#_1 &= \{(e_3, e_4), (e_4, e_3)\} \\
 l_1 &= \{(e_1, a), (e_2, a), (e_3, b), (e_4, b)\} \\
 E_2 &= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\} \\
 <_2 &= \{(e_1, e_2), (e_1, e_4), (e_1, e_5)\} \\
 \#_2 &= \{(e_2, e_5), (e_3, e_4), (e_3, e_5), (e_4, e_3), (e_5, e_2), (e_5, e_3)\} \\
 l_2 &= \{(e_1, a), (e_2, a), (e_3, b), (e_4, b), (e_5, a)\}
 \end{aligned}$$

Beweis:

Die Konfigurationen von \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 sind:

$$\begin{aligned}
 Conf(\mathcal{E}_1) &= \left\{ \emptyset, \underbrace{\{e_1\}}_{X_1}, \underbrace{\{e_3\}}_{X_2}, \underbrace{\{e_1, e_2\}}_{X_3}, \underbrace{\{e_1, e_3\}}_{X_4}, \underbrace{\{e_1, e_4\}}_{X_5}, \underbrace{\{e_1, e_2, e_3\}}_{X_6}, \underbrace{\{e_1, e_2, e_4\}}_{X_7} \right\} \\
 Conf(\mathcal{E}_2) &= \left\{ \emptyset, \underbrace{\{e_1\}}_{Y_1}, \underbrace{\{e_3\}}_{Y_2}, \underbrace{\{e_1, e_2\}}_{Y_3}, \underbrace{\{e_1, e_3\}}_{Y_4}, \underbrace{\{e_1, e_4\}}_{Y_5}, \underbrace{\{e_1, e_5\}}_{Y_6}, \right. \\
 &\quad \left. \underbrace{\{e_1, e_2, e_3\}}_{Y_7}, \underbrace{\{e_1, e_2, e_4\}}_{Y_8}, \underbrace{\{e_1, e_4, e_5\}}_{Y_9} \right\}
 \end{aligned}$$

Angenommen, es existiert eine History Preserving-Bisimulation B .

Wegen $Y_0 \implies_2 Y_6$ muß gelten: $(X_3, Y_6, \{(e_1, e_1), (e_2, e_5)\}) \in B$.

Wegen $X_3 \implies_1 X_6$ muß gelten: $(X_6, Y_9, \{(e_1, e_1), (e_2, e_5), (e_3, e_4)\}) \in B$.

Es ist aber $[Vis(Y_9)] = \boxed{a} \begin{array}{l} \nearrow \boxed{a} \\ \searrow \boxed{b} \end{array}$

ungleich $[Vis(X_6)] = \boxed{b} \quad \boxed{a} \longrightarrow \boxed{a}$, und damit gilt $\mathcal{E}_1 \not\equiv_{hb} \mathcal{E}_2$.

Die folgende Relation ist eine Pomset-ST-Bisimulation, also gilt $\mathcal{E}_1 \approx_{pbST} \mathcal{E}_2$:

$$\begin{aligned}
 B &= \{((X_0, X_0), (Y_0, Y_0), \emptyset), \\
 &\quad ((X_1, X_1), (Y_1, Y_1), \{(e_1, e_1)\}), \\
 &\quad ((X_2, X_2), (Y_2, Y_2), \{(e_3, e_3)\}), \\
 &\quad ((X_3, X_3), (Y_3, Y_3), \{(e_1, e_1), (e_2, e_2)\}), \\
 &\quad ((X_3, X_3), (Y_6, Y_6), \{(e_1, e_1), (e_2, e_5)\}), \\
 &\quad ((X_4, X_4), (Y_4, Y_4), \{(e_1, e_1), (e_3, e_3)\}), \\
 &\quad ((X_5, X_5), (Y_5, Y_5), \{(e_1, e_1), (e_4, e_4)\}),
 \end{aligned}$$

$((X_6, X_6), (Y_7, Y_7), ((e_1, e_1), (e_2, e_2), (e_3, e_3))),$
 $((X_7, X_7), (Y_8, Y_8), ((e_1, e_1), (e_2, e_2), (e_4, e_4))),$
 $((X_7, X_7), (Y_9, Y_9), ((e_1, e_1), (e_2, e_5), (e_4, e_4))),$
 $((X_1, X_0), (Y_1, Y_0), ((e_1, e_1))),$
 $((X_2, X_0), (Y_2, Y_0), ((e_3, e_3))),$
 $((X_3, X_1), (Y_3, Y_1), ((e_1, e_1), (e_2, e_2))),$
 $((X_3, X_1), (Y_6, Y_1), ((e_1, e_1), (e_2, e_5))),$
 $((X_4, X_0), (Y_4, Y_0), ((e_1, e_1), (e_3, e_3))),$
 $((X_4, X_1), (Y_4, Y_1), ((e_1, e_1), (e_3, e_3))),$
 $((X_4, X_2), (Y_4, Y_2), ((e_1, e_1), (e_3, e_3))),$
 $((X_5, X_1), (Y_5, Y_1), ((e_1, e_1), (e_4, e_4))),$
 $((X_6, X_1), (Y_7, Y_1), ((e_1, e_1), (e_2, e_2), (e_3, e_3))),$
 $((X_6, X_3), (Y_7, Y_3), ((e_1, e_1), (e_2, e_2), (e_3, e_3))),$
 $((X_6, X_4), (Y_7, Y_4), ((e_1, e_1), (e_2, e_2), (e_3, e_3))),$
 $((X_7, X_1), (Y_8, Y_1), ((e_1, e_1), (e_2, e_2), (e_4, e_4))),$
 $((X_7, X_1), (Y_9, Y_1), ((e_1, e_1), (e_2, e_5), (e_4, e_4))),$
 $((X_7, X_3), (Y_8, Y_3), ((e_1, e_1), (e_2, e_2), (e_4, e_4))),$
 $((X_7, X_3), (Y_9, Y_6), ((e_1, e_1), (e_2, e_5), (e_4, e_4))),$
 $((X_7, X_5), (Y_8, Y_5), ((e_1, e_1), (e_2, e_2), (e_4, e_4))),$
 $((X_7, X_5), (Y_9, Y_5), ((e_1, e_1), (e_2, e_5), (e_4, e_4))),$
 $((X_4, X_4), (Y_5, Y_5), ((e_1, e_1), (e_3, e_4))),$
 $((X_5, X_5), (Y_4, Y_4), ((e_1, e_1), (e_4, e_3))),$
 $((X_6, X_6), (Y_8, Y_8), ((e_1, e_1), (e_2, e_2), (e_3, e_4))),$
 $((X_6, X_6), (Y_9, Y_9), ((e_1, e_1), (e_2, e_5), (e_3, e_4))),$
 $((X_7, X_7), (Y_7, Y_7), ((e_1, e_1), (e_2, e_2), (e_4, e_3))),$
 $((X_4, X_1), (Y_5, Y_1), ((e_1, e_1), (e_3, e_4))),$
 $((X_5, X_1), (Y_4, Y_1), ((e_1, e_1), (e_4, e_3))),$
 $((X_6, X_1), (Y_8, Y_1), ((e_1, e_1), (e_2, e_2), (e_3, e_4))),$
 $((X_6, X_1), (Y_9, Y_1), ((e_1, e_1), (e_2, e_5), (e_3, e_4))),$
 $((X_6, X_3), (Y_8, Y_3), ((e_1, e_1), (e_2, e_2), (e_3, e_4))),$
 $((X_6, X_3), (Y_9, Y_6), ((e_1, e_1), (e_2, e_5), (e_3, e_4))),$
 $((X_6, X_4), (Y_8, Y_5), ((e_1, e_1), (e_2, e_2), (e_3, e_4))),$
 $((X_6, X_4), (Y_9, Y_5), ((e_1, e_1), (e_2, e_5), (e_3, e_4))),$
 $((X_7, X_1), (Y_7, Y_1), ((e_1, e_1), (e_2, e_2), (e_4, e_3))),$
 $((X_7, X_3), (Y_7, Y_3), ((e_1, e_1), (e_2, e_2), (e_4, e_3))),$
 $((X_7, X_5), (Y_7, Y_4), ((e_1, e_1), (e_2, e_2), (e_4, e_3)))\}$

SATZ 12.12

[Vogler]

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, \prec_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, \prec_2, \#_2, l_2)$ Ereignisstrukturen mit $\mathcal{E}_1 \approx_{pbST} \mathcal{E}_2$. Dann gilt $\mathcal{E}_1 \approx_{puST} \mathcal{E}_2$.

Beweis:

[Vogler]

Jeder Isomorphismus ist auch Homomorphismus. //

SATZ 12.13

[Vogler]

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, <_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, <_2, \#_2, l_2)$ Ereignisstrukturen mit $\mathcal{E}_1 \approx_{pbST} \mathcal{E}_2$. Dann gilt $\mathcal{E}_1 \approx_{pb} \mathcal{E}_2$.

Beweis:

[Vogler]

Offensichtlich gilt $X \in Conf(\mathcal{E}) \Leftrightarrow (X, X) \in STConf(\mathcal{E})$.

Deshalb ist $(X, Y, f) \in B_{pb} \Leftrightarrow ((X, X), (Y, Y), f) \in B_{pbST}$

die benötigte Bisimulation gemäß Lemma 10.15. //

Zuletzt folgt noch eine ST-Bisimulation analog der History Preserving-Bisimulation:

DEFINITION 12.14

[Vogler]

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, <_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, <_2, \#_2, l_2)$ Ereignisstrukturen.

Eine Relation $B \subseteq STConf(\mathcal{E}_1) \times STConf(\mathcal{E}_2) \times (E_1 \rightarrow E_2)$

mit $((\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \emptyset), \emptyset) \in B$ heißt *History Preserving-ST-Bisimulation* für \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 , wenn für alle $((X, P), (Y, Q), f) \in B$ gilt:

- o) $f: Vis(X) \rightarrow Vis(Y)$ ist Isomorphismus mit $f(Vis(P)) = Vis(Q)$
- i) $(X, P) \Longrightarrow_1 (X', P') \in STConf(\mathcal{E}_1) \Rightarrow \exists (Y', Q') \in STConf(\mathcal{E}_2), f' \in E_1 \rightarrow E_2$
mit $(Y, Q) \Longrightarrow_2 (Y', Q'), f'|_{Vis(X)} = f$ und $((X', P'), (Y', Q'), f') \in B$
- ii) $(Y, Q) \Longrightarrow_2 (Y', Q') \in STConf(\mathcal{E}_2) \Rightarrow \exists (X', P') \in STConf(\mathcal{E}_1), f' \in E_1 \rightarrow E_2$
mit $(X, P) \Longrightarrow_1 (X', P'), f'|_{Vis(X)} = f$ und $((X', P'), (Y', Q'), f') \in B$

Man definiert $\mathcal{E}_1 \approx_{hbST} \mathcal{E}_2 \Leftrightarrow \exists B$ History Preserving-ST-Bisimulation für \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 ,

B heißt dann History Preserving-ST-Bisimulation für $\mathcal{E}_1 \approx_{hbST} \mathcal{E}_2$,

und man schreibt dafür auch $\mathcal{E}_1 \stackrel{B}{\approx}_{hbST} \mathcal{E}_2$.

BEISPIEL 12.15

[Vogler]

Die folgenden primen Ereignisstrukturen (mit unsichtbaren Aktionen)

$\mathcal{E}_1 = (E_1, <_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, <_2, \#_2, l_2)$ sind history preserving-bisimilar, aber nicht interleaving-ST-bisimilar:



$$E_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$$

$$<_1 = \{(e_1, e_2), (e_1, e_3)\}$$

$$\#_1 = \{(e_2, e_3), (e_3, e_2)\}$$

$$l_1 = \{(e_1, a), (e_2, b), (e_3, \tau)\}$$

$$E_2 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

$$<_2 = \{(e_1, e_2), (e_1, e_3)\}$$

$$\#_2 = \{(e_1, e_4), (e_2, e_3), (e_2, e_4), (e_3, e_2), (e_3, e_4), (e_4, e_1), (e_4, e_2), (e_4, e_3)\}$$

$$l_2 = \{(e_1, a), (e_2, b), (e_3, \tau), (e_4, a)\}$$

Beweis:

Die Konfigurationen von \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 sind:

$$\text{Conf}(\mathcal{E}_1) = \left\{ \underbrace{\emptyset}_{X_0}, \underbrace{\{e_1\}}_{X_1}, \underbrace{\{e_1, e_2\}}_{X_2}, \underbrace{\{e_1, e_3\}}_{X_3} \right\}$$

$$\text{Conf}(\mathcal{E}_2) = \left\{ \underbrace{\emptyset}_{Y_0}, \underbrace{\{e_1\}}_{Y_1}, \underbrace{\{e_4\}}_{Y_2}, \underbrace{\{e_1, e_2\}}_{Y_3}, \underbrace{\{e_1, e_3\}}_{Y_4} \right\}$$

Angenommen, es existiert eine Interleaving-ST-Bisimulation B .

Wegen $(Y_0, Y_0) \xRightarrow{2} (Y_2, Y_0)$ muß gelten $((X_1, X_0), (Y_2, Y_0), \{(e_1, e_4)\}) \in B$.

Wegen $(X_1, X_0) \xRightarrow{1} (X_1, X_1)$ muß gelten $((X_1, X_1), (Y_2, Y_2), \{(e_1, e_4)\}) \in B$.

Nun gilt $(X_1, X_1) \xRightarrow{b} (X_2, X_2)$, aber $(Y_2, Y_2) \not\xRightarrow{b} (Y_2, Y_2)$, also $\mathcal{E}_1 \not\approx_{\text{IST}} \mathcal{E}_2$.

Die folgende Relation ist eine History Preserving-Bisimulation:

$$B = \{ (X_0, Y_0, \emptyset), \\ (X_1, Y_1, \{(e_1, e_1)\}), \\ (X_2, Y_3, \{(e_1, e_1), (e_2, e_2)\}), \\ (X_3, Y_2, \{(e_1, e_4)\}), \\ (X_3, Y_4, \{(e_1, e_1)\}) \}$$

Also gilt $\mathcal{E}_1 \approx_{\text{hb}} \mathcal{E}_2$.

Es wird sich später zeigen, daß das Vorhandensein von τ -Aktionen in diesem letzten Beispiel wesentlich ist, da im Fall von Ereignisstrukturen ohne unsichtbare Aktionen die History Preserving-Bisimulation immer die History Preserving-ST-Bisimulation impliziert. Aber auch in diesem Spezialfall reicht die Pomset-Bisimulation nicht aus:

BEISPIEL 12.16

[Vogler]

Die folgenden primen Ereignisstrukturen $\mathcal{E}_1 = (E_1, <_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, <_2, \#_2, l_2)$ aus Beispiel 10.14 sind pomset-bisimilar, aber nicht interleaving-ST-bisimilar:


Beweis:

Die Konfigurationen von \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 sind:

$$\text{Conf}(\mathcal{E}_1) = \left\{ \underbrace{\emptyset}_{X_0}, \underbrace{\{e_1\}}_{X_1}, \underbrace{\{e_2\}}_{X_2}, \underbrace{\{e_1, e_2\}}_{X_3}, \underbrace{\{e_1, e_3\}}_{X_4} \right\}$$

$$\text{Conf}(\mathcal{E}_2) = \left\{ \underbrace{\emptyset}_{Y_0}, \underbrace{\{e_1\}}_{Y_1}, \underbrace{\{e_2\}}_{Y_2}, \underbrace{\{e_4\}}_{Y_3}, \underbrace{\{e_1, e_3\}}_{Y_4}, \underbrace{\{e_2, e_4\}}_{Y_5} \right\}$$

Nach Beispiel 10.14 gilt bereits $\mathcal{E}_1 \approx_{\text{pb}} \mathcal{E}_2$.

Angenommen, es existiert eine Interleaving-ST-Bisimulation B .

Wegen $(Y_0, Y_0) \longrightarrow_2 (Y_2, Y_0)$ muß gelten $((X_1, X_0), (Y_2, Y_0), \{(e_1, e_2)\}) \in B$.

Wegen $(X_1, X_0) \longrightarrow_2 (X_3, X_0)$ folgt $((X_3, X_0), (Y_5, Y_0), \{(e_1, e_2), (e_2, e_4)\}) \in B$,
aber wegen $(Y_5, Y_0) \notin STConf(\mathcal{E}_2)$ folgt $\mathcal{E}_1 \not\approx_{ibST} \mathcal{E}_2$.

SATZ 12.17

[Vogler]

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, \prec_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, \prec_2, \#_2, l_2)$ Ereignisstrukturen mit $\mathcal{E}_1 \approx_{hbST} \mathcal{E}_2$. Dann gilt $\mathcal{E}_1 \approx_{pbST} \mathcal{E}_2$.

Beweis:

klar

SATZ 12.18

[Vogler]

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, \prec_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, \prec_2, \#_2, l_2)$ Ereignisstrukturen mit $\mathcal{E}_1 \approx_{hbST} \mathcal{E}_2$. Dann gilt $\mathcal{E}_1 \approx_{hb} \mathcal{E}_2$.

Beweis:

[Vogler]

Offensichtlich gilt $X \in Conf(\mathcal{E}) \Leftrightarrow (X, X) \in STConf(\mathcal{E})$.

Deshalb ist $(X, Y, f) \in B_{hb} \Leftrightarrow ((X, X), (Y, Y), f) \in B_{hbST}$

die benötigte Bisimulation. //

Es folgen nun noch die weiter oben angesprochenen zusätzlichen Implikationen.

LEMMA 12.19

[Vogler]

Zwei Ereignisstrukturen $\mathcal{E}_1 = (E_1, \prec_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, \prec_2, \#_2, l_2)$ sind genau dann

a) interleaving-ST-bisimilar, bzw.

b) history preserving-ST-bisimilar,

wenn eine Relation $B \subseteq Conf(\mathcal{E}_1) \times Conf(\mathcal{E}_2) \times (E_1 \rightarrow E_2)$ mit $(\emptyset, \emptyset, \emptyset) \in B$ existiert, so daß für alle $(X, Y, f) \in B$ gilt:

oa) $f: Vis(X) \rightarrow Vis(Y)$ ist eine markierungserhaltende Bijektion, bzw.

ob) $f: Vis(X) \rightarrow Vis(Y)$ ist ein Isomorphismus

i) $X \longrightarrow_1 X' \in Conf(\mathcal{E}_1) \Rightarrow \exists Y' \in Conf(\mathcal{E}_2), f' \in E_1 \rightarrow E_2$

mit $Y \longrightarrow_2 Y', f'|_{Vis(X)} = f$ und $(X', Y', f') \in B$

und aus $e \in Vis(X')$ maximal in X' folgt:

$f'(e)$ maximal in Y' , oder $e \in X$ und $f(e)$ nicht maximal in Y .

ii) $Y \longrightarrow_2 Y' \in Conf(\mathcal{E}_2) \Rightarrow \exists X' \in Conf(\mathcal{E}_1), f' \in E_1 \rightarrow E_2$

mit $X \longrightarrow_1 X', f'|_{Vis(X)} = f$ und $(X', Y', f') \in B$

und aus $e \in Vis(Y')$ maximal in Y' folgt:

$f'^{-1}(e)$ maximal in X' , oder $e \in Y$ und $f^{-1}(e)$ nicht maximal in X .

Beweis:

[Vogler]

„ \Rightarrow “ Sei \bar{B} eine Interleaving-ST- bzw. History Preserving-ST-Bisimulation.

Man definiert $B \subseteq Conf(\mathcal{E}_1) \times Conf(\mathcal{E}_2) \times (E_1 \rightarrow E_2)$ durch:

$(X, Y, f) \in B \Leftrightarrow \exists P, Q: ((X, P), (Y, Q), f) \in \bar{B}$ mit der Eigenschaft

$X \setminus P = \{e \in Vis(X) \mid e \text{ maximal in } X \wedge f(e) \text{ maximal in } Y\}$.

(*)

Es sei $(X, Y, f) \in B$ und gelte: $X \longrightarrow_1 X' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_1)$,

also existieren P, Q mit $((X, P), (Y, Q), f) \in \bar{B}$.

Die Bedingung 0a) bzw. 0b) an B folgt direkt aus der Bedingung 0) von \bar{B} .

Zu zeigen ist:

$\exists Y' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_2), f' \in E_1 \rightarrow E_2$ mit $Y \longrightarrow_2 Y', f'|_{\text{Vis}(X)} = f$ und $(X', Y', f') \in B$
und aus $e \in \text{Vis}(X')$ maximal in X' folgt:

$f'(e)$ maximal in Y' , oder $e \in X$ und $f(e)$ nicht maximal in Y . (**)

Man definiert

$P' := X' \setminus \{e \in \text{Vis}(X') \mid e \text{ maximal in } X', \text{ und } e \in X \Rightarrow e \in X \setminus P\}$. (***)

Für $e \in P \subseteq X \subseteq X'$ folgt $e \notin X \setminus P$ und damit $e \in P'$,

außerdem enthält $X' \setminus P'$ nur sichtbare, maximale Ereignisse.

Damit gilt $(X', P') \in \text{STConf}(\mathcal{E}_1)$ und $(X, P) \longrightarrow_1 (X', P')$.

Also existieren Y', Q', f' mit $(Y', Q') \in \text{STConf}(\mathcal{E}_2), (Y, Q) \longrightarrow_2 (Y', Q')$
und $((X', P'), (Y', Q'), f') \in \bar{B}$.

Hilfsbehauptung:

$X' \setminus P' = \{e \in \text{Vis}(X') \mid e \text{ maximal in } X' \wedge f'(e) \text{ maximal in } Y'\}$ (****)

„ \subseteq “ Sei $e \in X' \setminus P'$, also $e \in \text{Vis}(X')$, e maximal in X' .

Dann gilt: $f'(e) \in Y' \setminus Q'$ maximal in Y' , weil $Y' \setminus Q'$ ein Step ist und
außerdem $f'(X' \setminus P') = Y' \setminus Q'$ gilt.

„ \supseteq “ Sei $e \in \text{Vis}(X')$ maximal in X' , $f'(e)$ maximal in Y' ,

dann gilt: ($e \in X \Rightarrow e$ maximal in $X, f(e) = f'(e)$ maximal in Y' ,
und damit $f(e)$ maximal in Y).

Also gilt $e \in X \setminus P$ nach Definition von B in (*)

und damit $e \in X' \setminus P'$ nach Konstruktion von P' in (**).

Aus der Hilfsbehauptung (****) folgt somit $(X', Y', f') \in B$,

da die Bedingung in (*) erfüllt ist.

$Y \longrightarrow_2 Y'$ und $f'|_{\text{Vis}(X)} = f$ folgt aus der jeweiligen Definition von \bar{B} .

Es gelte also noch: $e \in \text{Vis}(X')$ maximal in X' und $f'(e)$ nicht maximal in Y' .

Dann gilt nach der Hilfsbehauptung (****): $e \notin X' \setminus P'$.

Aus der Definition (**) von $X' \setminus P'$ folgt dann $e \in X, e \notin X \setminus P$.

Da e maximal in X ist, folgt aus der Bedingung (*) an $X \setminus P$,

daß $f(e)$ nicht maximal in Y ist, und (**) ist somit erfüllt.

Aus Symmetriegründen erfüllt B damit die obigen Bedingungen. //

„ \Leftarrow “ Sei B eine Relation wie oben.

Man definiert $\bar{B} \subseteq \text{STConf}(\mathcal{E}_1) \times \text{STConf}(\mathcal{E}_2) \times (E_1 \rightarrow E_2)$ durch:

$((X, P), (Y, Q), f) \in \bar{B} \Leftrightarrow (X, Y, f) \in B, f(\text{Vis}(P)) = \text{Vis}(Q)$. (*)

Es sei $((X, P), (Y, Q), f) \in \bar{B}$ und gelte: $(X, P) \longrightarrow_1 (X', P') \in \text{STConf}(\mathcal{E}_1)$.

Die Bedingung 0) an \bar{B} folgt direkt aus der Bedingung 0a) bzw. 0b) von B .

Zu zeigen ist:

$\exists (Y', Q') \in \text{STConf}(\mathcal{E}_2), f' \in E_1 \rightarrow E_2$ mit $(Y, Q) \longrightarrow_2 (Y', Q'),$

$f'|_{\text{Vis}(X)} = f$ und $((X', P'), (Y', Q'), f') \in \bar{B}$ (**)

Es gilt speziell $X \longrightarrow_1 X'$.

Nach Voraussetzung existieren Y', f' mit $Y \longrightarrow_2 Y', (X', Y', f') \in B$.

Man definiert $Q' := f'(Vis(P')) \cup \{d \in Y' \mid l_2(d) = \tau\}$.

(***)

Dann gilt: $Vis(Y' \setminus Q') = Y' \setminus Q' = f'(Vis(X' \setminus P'))$.

Es sei $d \in Y' \setminus Q'$, dann gibt es ein $e \in X' \setminus P'$ mit $f'(e) = d$ und $e \in Vis(X')$ maximal in X' .

Aus $e \notin P'$ folgt $e \notin P$. Falls $e \in X$ gelten würde, wäre $f(e) \in Y \setminus Q$, und damit wäre $f(e)$ maximal in Y .

Nach der Voraussetzung i) muß deshalb $d = f'(e)$ maximal in Y' sein.

Wegen $Y' \setminus Q' = f'(X' \setminus P')$ sind also alle Elemente von $Y' \setminus Q'$ maximal in Y' .

Es sei $e \in Q$. Für $e \notin Vis(Q)$ folgt nach (***) direkt $e \in Q'$, und für $e \in Vis(Q)$ folgt $e \in f(Vis(P)) = f'(Vis(P')) \subseteq Q'$,

und damit gilt $Q \subseteq Q'$ und $(Y', Q') \in STConf(\mathcal{E}_2)$.

$Y \subseteq Y'$ ist unmittelbar klar, somit gilt $(Y, Q) \longrightarrow_2 (Y', Q')$.

$f'|_{Vis(X)} = f$ folgt aus den Eigenschaften von B , und wegen $f(Vis(P)) = Vis(Q)$ folgt $((X', P'), (Y', Q'), f') \in \bar{B}$ aus (*). Damit ist (**) erfüllt.

Aus Symmetriegründen ist \bar{B} damit die gewünschte ST-Bisimulation. //

SATZ 12.20

[Vogler]

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, <_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, <_2, \#_2, l_2)$ Ereignisstrukturen mit $\mathcal{E}_1 \approx_{ibST} \mathcal{E}_2$. Dann gilt $\mathcal{E}_1 \approx_{sb} \mathcal{E}_2$.

Beweis:

[Vogler]

Es existiert eine Interleaving-Bisimulation B wie in Lemma 12.19.

Es sei $(X, Y, f) \in B$, $X \longrightarrow_1 X'$, $X' \setminus X$ ist Step.

Sei X'' bezüglich $<_X$ minimale linksabgeschlossene Teilmenge von X' mit der Eigenschaft $X \cup Vis(X' \setminus X) \subseteq X''$.

Dann gilt $X \longrightarrow_1 X'' \longrightarrow_1 X'$, also existieren D'', f'', D', f' wie in Lemma 12.19.

$e \in Vis(X'' \setminus X) = Vis(X' \setminus X)$ maximal in X'' impliziert: $f''(e)$ maximal in Y'' , also ist $Vis(Y'' \setminus Y)$ Step, und wegen $Vis(X' \setminus X'') = \emptyset$ gilt $f' = f''$.

Damit ist $f': Vis(X' \setminus X) = Vis(X'' \setminus X) \rightarrow Vis(Y' \setminus Y) = Vis(Y'' \setminus Y)$ ein Isomorphismus.

Aus Symmetriegründen folgt mit Lemma 10.19 damit die Behauptung. //

SATZ 12.21

[Vogler]

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, <_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, <_2, \#_2, l_2)$ Ereignisstrukturen ohne unsichtbare Aktionen mit $\mathcal{E}_1 \approx_{ib} \mathcal{E}_2$. Dann gilt $\mathcal{E}_1 \approx_{ibST} \mathcal{E}_2$.

Beweis:

[Vogler]

Es existiert eine History Preserving-Bisimulation B , und es sei $(X, Y, f) \in B$.

Nach Voraussetzung gilt $Vis(X) = X$, und der Isomorphismus f bildet maximale Elemente aus X auf maximale Elemente von Y ab.

Damit sind die Bedingungen aus Lemma 12.19 immer erfüllt. //

BEMERKUNG 12.22

Da die (nicht isomorphen) Ereignisstrukturen aus Beispiel 10.17 keine unsichtbaren Aktionen enthalten, sind sie also auch history preserving-ST-bisimilar.

SATZ 12.23

Die Relationen \approx_{ibST} , \approx_{puST} , \approx_{pbST} und \approx_{hbST} sind Äquivalenzrelationen.

Beweis:

analog §2

§13 Failure-Äquivalenzen

Analog der „natürlichen“ Definition der Failures bei Transitionssystemen (also ohne Berücksichtigung von Divergenzproblemen) werden nun für die verschiedenen Betrachtungsweisen bei Ereignisstrukturen die jeweiligen Failure-Äquivalenzen definiert.

Es wird sich zeigen, daß sie auch hier zwischen den Bisimulationen und den Trace-Äquivalenzen der zugehörigen Varianten liegen und untereinander die zu erwartenden Implikationen gelten.

Im einfachsten Fall werden die Failures (wie bei den Transitionssystemen) als Paar einer Aktionsfolge mit einer Menge von Aktionen definiert. Mit der Aktionsfolge ist eine Konfiguration erreichbar, von der aus keine Aktion der Menge ausführbar ist.

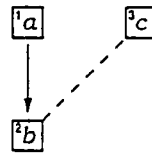
DEFINITION 13.1

Es sei $\mathcal{E} = (E, <, \#, l)$ eine Ereignisstruktur. Man definiert die *Interleaving Failures*:

$$\text{seq fails}(\mathcal{E}) := \left\{ (\omega, F) \mid \omega \in \text{Vis}^*, F \subseteq \text{Vis}, \emptyset \xrightarrow{\omega} X \in \text{Conf}(\mathcal{E}), X \not\xrightarrow{\alpha} \forall \alpha \in F \right\}$$

BEISPIEL 13.2

Man betrachte wieder die prime Ereignisstruktur $\mathcal{E} = (E, <, \#, l)$ aus Beispiel 11.2:



Die Interleaving Failures sind:

$$\begin{aligned} \text{seq fails}(\mathcal{E}) = & \left(\{\varepsilon\} \times \mathcal{P}(\text{Vis} \setminus \{a, c\}) \right) \\ & \cup \left(\{a\} \times \mathcal{P}(\text{Vis} \setminus \{b, c\}) \right) \\ & \cup \left(\{c\} \times \mathcal{P}(\text{Vis} \setminus \{a\}) \right) \\ & \cup \left(\{ab, ac, ca\} \times \mathcal{P}(\text{Vis}) \right) \end{aligned}$$

DEFINITION 13.3

Zwei Ereignisstrukturen $\mathcal{E}_1 = (E_1, <_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, <_2, \#_2, l_2)$ heißen *interleaving failure-äquivalent* (geschrieben $\mathcal{E}_1 \approx_f \mathcal{E}_2$), wenn gilt: $\text{seq fails}(\mathcal{E}_1) = \text{seq fails}(\mathcal{E}_2)$.

SATZ 13.4

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, <_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, <_2, \#_2, l_2)$ Ereignisstrukturen mit $\mathcal{E}_1 \approx_b \mathcal{E}_2$. Dann gilt $\mathcal{E}_1 \approx_f \mathcal{E}_2$.

Beweis:

Es existiert eine Interleaving-Bisimulation B .

Es sei $(\omega, F) \in \text{seq fails}(\mathcal{E}_1)$, also $\emptyset \xrightarrow{\omega}_1 X \in \text{Conf}(\mathcal{E}_1)$ und $X \not\xrightarrow{\alpha}_1 \forall \alpha \in F$.

Dann existiert ein $Y \in \text{Conf}(\mathcal{E}_2)$ mit $\emptyset \xrightarrow{\omega}_2 Y$, $(X, Y) \in B$.

Angenommen, es gibt ein $\alpha \in F$ mit $Y \xrightarrow{\alpha}_2 Y' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_2)$, dann existiert auch ein $X \xrightarrow{\alpha}_1 X' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_2)$ mit $(X', Y') \in B$. \dagger

Also gilt $(\omega, F) \in \text{seq fails}(\mathcal{E}_2)$, und aus Symmetriegründen folgt $\mathcal{E}_1 \approx_{\text{sf}} \mathcal{E}_2$. //

SATZ 13.5

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, \prec_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, \prec_2, \#_2, l_2)$ Ereignisstrukturen mit $\mathcal{E}_1 \approx_{\text{sf}} \mathcal{E}_2$. Dann gilt $\mathcal{E}_1 \approx_{\text{it}} \mathcal{E}_2$.

Beweis:

$$\begin{aligned} \omega \in \text{seq traces}(\mathcal{E}_1) &\Rightarrow (\omega, \emptyset) \in \text{seq fails}(\mathcal{E}_1) = \text{seq fails}(\mathcal{E}_2) \\ &\Rightarrow \omega \in \text{seq traces}(\mathcal{E}_2) \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen folgt $\mathcal{E}_1 \approx_{\text{it}} \mathcal{E}_2$. //

Nun werden Step Failures als Paar von Step-Folgen und einer Menge von Steps definiert. Mit der Step-Folge ist eine Konfiguration erreichbar, von der aus keiner der Steps der Menge ausführbar ist.

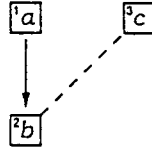
DEFINITION 13.6

Es sei $\mathcal{E} = (E, \prec, \#, l)$ eine Ereignisstruktur. Man definiert die *Step Failures*:

$$\text{step fails}(\mathcal{E}) := \left\{ (W, F) \mid W \in (\mathbb{N}_0^{\text{vis}})^*, F \subseteq \mathbb{N}_0^{\text{vis}}, \emptyset \xrightarrow{W} X \in \text{Conf}(\mathcal{E}), \right. \\ \left. X \not\xrightarrow{A} \forall A \in F \right\}$$

BEISPIEL 13.7

Man betrachte wieder die prime Ereignisstruktur $\mathcal{E} = (E, \prec, \#, l)$ aus Beispiel 11.2:



Die Step Failures sind:

$$\begin{aligned} \text{step fails}(\mathcal{E}) = & \left(\{\varepsilon\} \times \mathcal{P}(\mathbb{N}_0^{\text{vis}} \setminus \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}\}) \right) \\ & \cup \left(\{\{a\}\} \times \mathcal{P}(\mathbb{N}_0^{\text{vis}} \setminus \{\emptyset, \{b\}, \{c\}\}) \right) \\ & \cup \left(\{\{c\}\} \times \mathcal{P}(\mathbb{N}_0^{\text{vis}} \setminus \{\emptyset, \{a\}\}) \right) \\ & \cup \left(\{\{a\}\{b\}, \{a\}\{c\}, \{c\}\{a\}, \{a, c\}\} \times \mathcal{P}(\mathbb{N}_0^{\text{vis}} \setminus \{\emptyset\}) \right) \end{aligned}$$

DEFINITION 13.8

Zwei Ereignisstrukturen $\mathcal{E}_1 = (E_1, \prec_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, \prec_2, \#_2, l_2)$ heißen *step failure-äquivalent* (geschrieben $\mathcal{E}_1 \approx_{\text{sf}} \mathcal{E}_2$), wenn gilt: $\text{step fails}(\mathcal{E}_1) = \text{step fails}(\mathcal{E}_2)$.

SATZ 13.9

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, \prec_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, \prec_2, \#_2, l_2)$ Ereignisstrukturen mit $\mathcal{E}_1 \approx_{\text{sf}} \mathcal{E}_2$. Dann gilt $\mathcal{E}_1 \approx_{\text{sf}} \mathcal{E}_2$.

Beweis:

Für jedes $\omega = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \text{Vis}^*$ gilt auch $\omega \in (\mathbb{N}_0^{\text{Vis}})^*$,

und jede Aktion $\alpha_i \in \text{Vis}$ und $\alpha \in F$ ist auch ein Step.

Also gilt $(\omega, F) \in \text{seq fails}(\mathcal{E}_1) \Rightarrow (\omega, F) \in \text{step fails}(\mathcal{E}_1) = \text{step fails}(\mathcal{E}_2)$.

Damit existiert ein $Y \in \text{Conf}(\mathcal{E}_2)$ mit $\emptyset \xrightarrow{\omega}_2 Y$,

und es folgt direkt $(\omega, F) \in \text{seq fails}(\mathcal{E}_2)$.

Aus Symmetriegründen folgt $\mathcal{E}_1 \approx_{sf} \mathcal{E}_2$. //

SATZ 13.10

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, \prec_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, \prec_2, \#_2, l_2)$ Ereignisstrukturen mit $\mathcal{E}_1 \approx_{sb} \mathcal{E}_2$.

Dann gilt $\mathcal{E}_1 \approx_{sf} \mathcal{E}_2$.

Beweis:

Es existiert eine Step-Bisimulation B .

Es sei $(W, F) \in \text{step fails}(\mathcal{E}_1)$, also $\emptyset \xrightarrow{W}_1 X \in \text{Conf}(\mathcal{E}_1)$ und $X \not\xrightarrow{A}_1 \forall A \in F$.

Dann existiert ein $Y \in \text{Conf}(\mathcal{E}_2)$ mit $\emptyset \xrightarrow{W}_2 Y$, $(X, Y) \in B$.

Angenommen, es gibt ein $A \in F$ mit $Y \xrightarrow{A}_2 Y' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_2)$, dann existiert auch ein $X \xrightarrow{A}_1 X' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_1)$ mit $(X', Y') \in B$. \nmid

Also gilt $(W, F) \in \text{step fails}(\mathcal{E}_2)$,

und aus Symmetriegründen folgt $\mathcal{E}_1 \approx_{sf} \mathcal{E}_2$. //

SATZ 13.11

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, \prec_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, \prec_2, \#_2, l_2)$ Ereignisstrukturen mit $\mathcal{E}_1 \approx_{sf} \mathcal{E}_2$.

Dann gilt $\mathcal{E}_1 \approx_{st} \mathcal{E}_2$.

Beweis:

$W \in \text{step traces}(\mathcal{E}_1) \Rightarrow (W, \emptyset) \in \text{step fails}(\mathcal{E}_1) = \text{step fails}(\mathcal{E}_2)$

$\Rightarrow W \in \text{step traces}(\mathcal{E}_2)$

Aus Symmetriegründen folgt $\mathcal{E}_1 \approx_{st} \mathcal{E}_2$. //

BEMERKUNG 13.12

Aus Satz 13.4 und Satz 13.11 ergibt sich, daß die primen Ereignisstrukturen aus Beispiel 11.8 interleaving failure-äquivalent, aber nicht step failure-äquivalent sind.

Die nun folgende Partial Word-Variante einer Failure-Äquivalenz ist weniger anschaulich als die Interleaving- oder Step Failure-Äquivalenz, ergibt sich aber in natürlicher Weise aus den Definitionen der Partial Word-Bisimulation und der Partial Word Trace-Äquivalenz.

Mit einem Pomset oder einem schwächer sequentiellen Pomset ist eine Konfiguration erreichbar, von der aus keines der Pomsets der Menge und auch kein schwächer sequentielles Pomset ausführbar ist.

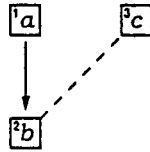
DEFINITION 13.13

Es sei $\mathcal{E} = (E, \prec, \#, l)$ eine Ereignisstruktur. Man definiert die *Partial Word Failures*:

$$\text{part fails}(\mathcal{E}) := \left\{ (p, F) \mid p \in \mathbb{P}, F \subseteq \mathbb{P}, \exists p' \leq p, \emptyset \xrightarrow{p'} X \in \text{Conf}(\mathcal{E}), \right. \\ \left. X \not\xrightarrow{q'} \forall q' \leq q \in F \right\}$$

BEISPIEL 13.14

Man betrachte wieder die prime Ereignisstruktur $\mathcal{E} = (E, \prec, \#, l)$ aus Beispiel 11.2:



Die Partial Word Failures sind:

$$\begin{aligned} \text{part fails}(\mathcal{E}) = & \left(\{[\emptyset]\} \times \mathcal{P}(\mathbb{P} \setminus \{[\emptyset], [a], [c], [a] \rightarrow [b], \right. \\ & \left. [a] \quad [c], [a] \rightarrow [c], [a] \leftarrow [c]\}) \right) \\ & \cup \left(\{[a]\} \times \mathcal{P}(\mathbb{P} \setminus \{[\emptyset], [b], [c]\}) \right) \\ & \cup \left(\{[c]\} \times \mathcal{P}(\mathbb{P} \setminus \{[\emptyset], [a]\}) \right) \\ & \cup \left(\{[a] \rightarrow [b], [a] \quad [c], [a] \rightarrow [c], [a] \leftarrow [c]\} \times \mathcal{P}(\mathbb{P} \setminus \{[\emptyset]\}) \right) \end{aligned}$$

DEFINITION 13.15

Zwei Ereignisstrukturen $\mathcal{E}_1 = (E_1, \prec_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, \prec_2, \#_2, l_2)$ heißen

partial word failure-äquivalent (geschrieben $\mathcal{E}_1 \approx_{pwf} \mathcal{E}_2$),

wenn gilt: $\text{part fails}(\mathcal{E}_1) = \text{part fails}(\mathcal{E}_2)$.

SATZ 13.16

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, \prec_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, \prec_2, \#_2, l_2)$ Ereignisstrukturen mit $\mathcal{E}_1 \approx_{pwf} \mathcal{E}_2$. Dann gilt $\mathcal{E}_1 \approx_{sf} \mathcal{E}_2$.

Beweis:

Es sei $(W, F) \in \text{step fails}(\mathcal{E}_1)$, also $\emptyset \xrightarrow{w}_1 X \in \text{Conf}(\mathcal{E}_1)$ und $X \not\xrightarrow{A}_1 \forall A \in F$.

Zu jedem Step $A \in F$ sei $q_A \in \mathbb{P}$ das entsprechende Pomset und $p = [\text{Vis}(X)]$.

Da jedes Pomset, das schwächer sequentiell als q_A ist, gleich q_A sein muß, folgt $(p, \{q_A \mid A \in F\}) \in \text{part fails}(\mathcal{E}_1) = \text{part fails}(\mathcal{E}_2)$.

Damit gibt es $p' \leq p$, $Y \in \text{Conf}(\mathcal{E}_2)$, $\emptyset \xrightarrow{p'}_2 Y$, und damit gilt $\emptyset \xrightarrow{w}_1 Y$.

Daraus folgt unmittelbar $(W, F) \in \text{step fails}(\mathcal{E}_2)$,

und aus Symmetriegründen folgt $\mathcal{E}_1 \approx_{sf} \mathcal{E}_2$. //

SATZ 13.17

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, \prec_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, \prec_2, \#_2, l_2)$ Ereignisstrukturen mit

$\mathcal{E}_1 \approx_{pub} \mathcal{E}_2$. Dann gilt $\mathcal{E}_1 \approx_{pwf} \mathcal{E}_2$.

Beweis:

Es existiert eine Partial Word-Bisimulation B .

Es sei $(p, F) \in \text{part fails}(\mathcal{E}_1)$, also existiert ein $p' \leq p$ mit

$\emptyset \xrightarrow{p'} X \in \text{Conf}(\mathcal{E}_1)$ und $X \not\xrightarrow{q'} \forall q' \leq q \in F$.

Dann existiert ein $Y \in \text{Conf}(\mathcal{E}_2)$, $p'' \leq p'$ mit $\emptyset \xrightarrow{p''} Y$, $(X, Y) \in B$.

Angenommen, es gibt ein $q' \leq q \in F$ mit $Y \xrightarrow{q'} Y' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_2)$,

dann existiert auch ein $q'' \leq q'$, $X \xrightarrow{q''} X' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_2)$ mit $(X', Y') \in B$. \nmid

Also gilt wegen $p'' \leq p$, $q'' \leq q$: $(p, F) \in \text{part fails}(\mathcal{E}_2)$,

und aus Symmetriegründen folgt $\mathcal{E}_1 \approx_{\text{pwf}} \mathcal{E}_2$. //

SATZ 13.18

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, <_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, <_2, \#_2, l_2)$ Ereignisstrukturen mit $\mathcal{E}_1 \approx_{\text{pwf}} \mathcal{E}_2$.

Dann gilt $\mathcal{E}_1 \approx_{\text{pwf}} \mathcal{E}_2$.

Beweis:

$p \in \text{part traces}(\mathcal{E}_1) \Rightarrow (p, \emptyset) \in \text{part fails}(\mathcal{E}_1) = \text{part fails}(\mathcal{E}_2)$

$\Rightarrow p \in \text{part traces}(\mathcal{E}_2)$

Aus Symmetriegründen folgt $\mathcal{E}_1 \approx_{\text{pwf}} \mathcal{E}_2$. //

BEMERKUNG 13.19

Aus Satz 13.10 und Satz 13.18 ergibt sich, daß die primen Ereignisstrukturen aus Beispiel 11.14 step failure-äquivalent, aber nicht partial word failure-äquivalent sind.

Zuletzt folgen wieder die Pomset Failures, die gegenüber den Partial Word Failures anschaulicher als Paar von Konfigurationen mit Mengen von Pomsets definiert sind. Mit dem Pomset ist eine Konfiguration erreichbar, von der aus keines der Pomsets der Menge ausführbar ist.

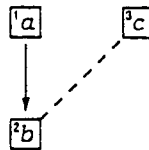
DEFINITION 13.20

Es sei $\mathcal{E} = (E, <, \#, l)$ eine Ereignisstruktur. Man definiert die *Pomset Failures*:

$$\text{pom fails}(\mathcal{E}) := \left\{ (p, F) \mid p \in \mathbb{P}, F \subseteq \mathbb{P}, \emptyset \xrightarrow{p} X \in \text{Conf}(\mathcal{E}), X \not\xrightarrow{q} \forall q \in F \right\}$$

BEISPIEL 13.21

Man betrachte wieder die prime Ereignisstruktur $\mathcal{E} = (E, <, \#, l)$ aus Beispiel 11.2:



Die Pomset Failures sind:

$$\begin{aligned} \text{pom fails}(\mathcal{E}) = & \left(\{[\emptyset]\} \times \mathcal{P}(\mathbb{P} \setminus \{[\emptyset], [\underline{a}], [\underline{c}], [\underline{a}] \longrightarrow [\underline{b}], [\underline{a}] \quad [\underline{c}]\}) \right) \\ & \cup \left(\{[\underline{a}]\} \times \mathcal{P}(\mathbb{P} \setminus \{[\emptyset], [\underline{b}], [\underline{c}]\}) \right) \\ & \cup \left(\{[\underline{c}]\} \times \mathcal{P}(\mathbb{P} \setminus \{[\emptyset], [\underline{a}]\}) \right) \\ & \cup \left(\{[\underline{a}] \longrightarrow [\underline{b}], [\underline{a}] \quad [\underline{c}]\} \times \mathcal{P}(\mathbb{P} \setminus \{[\emptyset]\}) \right) \end{aligned}$$

DEFINITION 13.22

Zwei Ereignisstrukturen $\mathcal{E}_1 = (E_1, \prec_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, \prec_2, \#_2, l_2)$ heißen *pomset failure-äquivalent* (geschrieben $\mathcal{E}_1 \approx_{pf} \mathcal{E}_2$), wenn gilt: $\text{pom fails}(\mathcal{E}_1) = \text{pom fails}(\mathcal{E}_2)$.

SATZ 13.23

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, \prec_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, \prec_2, \#_2, l_2)$ Ereignisstrukturen mit $\mathcal{E}_1 \approx_{pf} \mathcal{E}_2$. Dann gilt $\mathcal{E}_1 \approx_{pwf} \mathcal{E}_2$.

Beweis:

Es sei $(p, F) \in \text{part fails}(\mathcal{E}_1)$, also existiert ein $p' \leq p$ mit $\emptyset \xrightarrow{p'}_1 X \in \text{Conf}(\mathcal{E}_1)$ und $X \not\xrightarrow{q'}_1 \forall q' \leq q \in F$.
Daraus folgt $(p', \{q' \mid q' \leq q \in F\}) \in \text{pom fails}(\mathcal{E}_1) = \text{pom fails}(\mathcal{E}_2)$.
Daraus folgt direkt $(p, F) \in \text{part fails}(\mathcal{E}_2)$,
und aus Symmetriegründen folgt $\mathcal{E}_1 \approx_{pwf} \mathcal{E}_2$. //

SATZ 13.24

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, \prec_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, \prec_2, \#_2, l_2)$ Ereignisstrukturen mit $\mathcal{E}_1 \approx_{pb} \mathcal{E}_2$. Dann gilt $\mathcal{E}_1 \approx_{pf} \mathcal{E}_2$.

Beweis:

Es existiert eine Pomset-Bisimulation B .
Es sei $(p, F) \in \text{pom fails}(\mathcal{E}_1)$, also $\emptyset \xrightarrow{p}_1 X \in \text{Conf}(\mathcal{E}_1)$ und $X \not\xrightarrow{q}_1 \forall q \in F$.
Dann existiert ein $Y \in \text{Conf}(\mathcal{E}_2)$ mit $\emptyset \xrightarrow{p}_2 Y$, $(X, Y) \in B$.
Angenommen, es gibt ein $q \in F$ mit $Y \xrightarrow{q}_2 Y' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_2)$, dann existiert auch ein $X \xrightarrow{q}_1 X' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_1)$ mit $(X', Y') \in B$. \nmid
Also gilt $(p, F) \in \text{pom fails}(\mathcal{E}_2)$, und aus Symmetriegründen folgt $\mathcal{E}_1 \approx_{pf} \mathcal{E}_2$. //

SATZ 13.25

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, \prec_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, \prec_2, \#_2, l_2)$ Ereignisstrukturen mit $\mathcal{E}_1 \approx_{pf} \mathcal{E}_2$. Dann gilt $\mathcal{E}_1 \approx_{pt} \mathcal{E}_2$.

Beweis:

$$\begin{aligned} p \in \text{pom traces}(\mathcal{E}_1) & \Rightarrow (p, \emptyset) \in \text{pom fails}(\mathcal{E}_1) = \text{pom fails}(\mathcal{E}_2) \\ & \Rightarrow p \in \text{pom traces}(\mathcal{E}_2) \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen folgt $\mathcal{E}_1 \approx_{pt} \mathcal{E}_2$. //

BEMERKUNG 13.26

Aus Satz 13.17 und Satz 13.25 ergibt sich, daß die primen Ereignisstrukturen aus Beispiel 11.18 partial word failure-äquivalent, aber nicht pomset failure-äquivalent sind.

BEISPIEL 13.27

Die folgenden primen Ereignisstrukturen $\mathcal{E}_1 = (E_1, <_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, <_2, \#_2, l_2)$ aus Beispiel 11.21 sind pomset trace-äquivalent, aber nicht interleaving failure-äquivalent:



Beweis:

Die Konfigurationen von \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 sind:

$$\text{Conf}(\mathcal{E}_1) = \left\{ \underbrace{\emptyset}_{X_0}, \underbrace{\{e_1\}}_{X_1}, \underbrace{\{e_1, e_2\}}_{X_2}, \underbrace{\{e_1, e_3\}}_{X_3} \right\}$$

$$\text{Conf}(\mathcal{E}_2) = \left\{ \underbrace{\emptyset}_{Y_0}, \underbrace{\{e_1\}}_{Y_1}, \underbrace{\{e_4\}}_{Y_2}, \underbrace{\{e_1, e_2\}}_{Y_3}, \underbrace{\{e_3, e_4\}}_{Y_4} \right\}$$

Nach Beispiel 11.21 gilt bereits $\mathcal{E}_1 \approx_{pt} \mathcal{E}_2$.

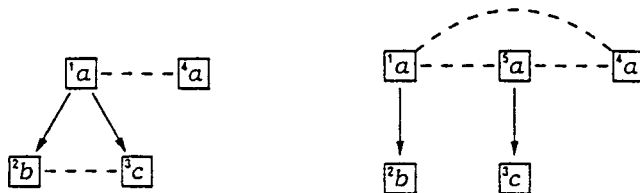
Wegen $Y_1 \in \text{Conf}(\mathcal{E}_2)$ gilt $(a, \{c\}) \in \text{seq fails}(\mathcal{E}_2)$,

aber es gilt stets $\emptyset \xrightarrow{a} X_1 \xrightarrow{c} X_3$, also $(a, \{c\}) \notin \text{seq fails}(\mathcal{E}_1)$.

Daraus folgt $\mathcal{E}_1 \neq_{if} \mathcal{E}_2$.

BEISPIEL 13.28

Die folgenden primen Ereignisstrukturen $\mathcal{E}_1 = (E_1, <_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, <_2, \#_2, l_2)$ sind pomset failure-äquivalent, aber nicht interleaving-bisimilar:



$$E_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

$$<_1 = \{(e_1, e_2), (e_1, e_3)\}$$

$$\#_1 = \{(e_1, e_4), (e_2, e_3), (e_2, e_4), (e_3, e_2), (e_3, e_4), (e_4, e_1), (e_4, e_2), (e_4, e_3)\}$$

$$l_1 = \{(e_1, a), (e_2, b), (e_3, c), (e_4, a)\}$$

$$E_2 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

$$<_2 = \{(e_1, e_2), (e_5, e_3)\}$$

$$\#_2 = \{(e_1, e_3), (e_1, e_4), (e_1, e_5), (e_2, e_3), (e_2, e_4), (e_2, e_5), (e_3, e_1), (e_3, e_2), (e_3, e_4), (e_4, e_1), (e_4, e_2), (e_4, e_3), (e_4, e_5), (e_5, e_1), (e_5, e_2), (e_5, e_4)\}$$

$$l_2 = \{(e_1, a), (e_2, b), (e_3, c), (e_4, a), (e_5, a)\}$$

Beweis:

Die Konfigurationen von \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 sind:

$$\text{Conf}(\mathcal{E}_1) = \left\{ \underbrace{\emptyset}_{X_0}, \underbrace{\{e_1\}}_{X_1}, \underbrace{\{e_4\}}_{X_2}, \underbrace{\{e_1, e_2\}}_{X_3}, \underbrace{\{e_1, e_3\}}_{X_4} \right\}$$

$$\text{Conf}(\mathcal{E}_2) = \left\{ \underbrace{\emptyset}_{Y_0}, \underbrace{\{e_1\}}_{Y_1}, \underbrace{\{e_4\}}_{Y_2}, \underbrace{\{e_5\}}_{Y_3}, \underbrace{\{e_1, e_2\}}_{Y_4}, \underbrace{\{e_3, e_5\}}_{Y_5} \right\}$$

Angenommen, es existiert eine Interleaving-Bisimulation B .

Wegen $Y_0 \xrightarrow{a} Y_1$ muß gelten $(X_1, Y_1) \in B$ oder $(X_2, Y_1) \in B$.

Fall 1) $(X_1, Y_1) \in B$

Es gilt $X_1 \xrightarrow{c} X_4$, aber $Y_1 \not\xrightarrow{c} Y_2$. \nmid

Fall 2) $(X_2, Y_1) \in B$

Es gilt $Y_1 \xrightarrow{b} Y_4$, aber $X_2 \not\xrightarrow{b} X_1$. \nmid

Aus beiden Fällen folgt $\mathcal{E}_1 \not\approx_{ib} \mathcal{E}_2$.

Wegen den Konfigurationen X_2 und Y_2 gilt:

$$\begin{aligned} \text{pom fails}(\mathcal{E}_1) &= \left(\{[\emptyset]\} \times \mathcal{P}(\mathbb{P} \setminus \{[\emptyset], [\underline{a}], [\underline{a}] \longrightarrow [\underline{b}], [\underline{a}] \longrightarrow [\underline{c}]\}) \right) \\ &\quad \cup \left(\{[\underline{a}], [\underline{a}] \longrightarrow [\underline{b}], [\underline{a}] \longrightarrow [\underline{c}]\} \times \mathcal{P}(\mathbb{P} \setminus \{[\emptyset]\}) \right) \\ &= \text{pom fails}(\mathcal{E}_2) \end{aligned}$$

und damit $\mathcal{E}_1 \approx_{pf} \mathcal{E}_2$.

§14 Eigenkonkurrenz

Unter dem Begriff Eigenkonkurrenz versteht man die Situation, daß in einer Konfiguration verschiedene Ereignisse miteinander konkurrieren (parallel eintreten können), die die gleiche sichtbare Aktion tragen.

DEFINITION 14.1

[Gla/Go]

Es sei $\mathcal{E} = (E, \prec, \#, l)$ eine Ereignisstruktur.

\mathcal{E} heißt *ohne Eigenkonkurrenz*, wenn für alle $X \in \text{Conf}(\mathcal{E})$ und alle $d, e \in \text{Vis}(X)$ gilt:

$$d \text{ co}_X e \wedge l(d) = l(e) \Rightarrow d = e,$$

im anderen Fall heißt \mathcal{E} *mit Eigenkonkurrenz* oder *eigenkonkurrent*.

BEMERKUNG 14.2

Alle in den Kapiteln „§10 Bisimulationen“ bis „§13 Failure-Äquivalenzen“ aufgeführten Beispiele sind ohne Eigenkonkurrenz, die jeweils widerlegten Implikationen gelten also auch mit dieser zusätzlichen Einschränkung nicht.

Es wird sich später erweisen, daß im Spezialfall der Ereignisstrukturen ohne Eigenkonkurrenz die History Preserving-Bisimulation mit einer abgeschwächten Definition beschrieben werden kann:

DEFINITION 14.3

[Gla/Go]

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, \prec_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, \prec_2, \#_2, l_2)$ Ereignisstrukturen.

Eine Relation $B \subseteq \text{Conf}(\mathcal{E}_1) \times \text{Conf}(\mathcal{E}_2) \times \mathcal{P}(E_1 \times E_2)$ mit $(\emptyset, \emptyset, \emptyset) \in B$ heißt

*schwache History Preserving-Bisimulation*¹ für \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 , wenn für alle $(X, Y, f) \in B$ gilt:

- o) $f: \text{Vis}(X) \rightarrow \text{Vis}(Y)$ ist ein Isomorphismus
- i) $X \Longrightarrow_1 X' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_1) \Rightarrow \exists Y' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_2), f' \in E_1 \rightarrow E_2$
mit $Y \Longrightarrow_2 Y', (X', Y', f') \in B$ und $f': \text{Vis}(X') \rightarrow \text{Vis}(Y')$ ist ein Isomorphismus
- ii) $Y \Longrightarrow_2 Y' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_2) \Rightarrow \exists X' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_1), f' \in E_1 \rightarrow E_2$
mit $X \Longrightarrow_1 X', (X', Y', f') \in B$ und $f': \text{Vis}(X') \rightarrow \text{Vis}(Y')$ ist ein Isomorphismus

Man definiert $\mathcal{E}_1 \approx_{whb} \mathcal{E}_2 \Leftrightarrow \exists B$ schwache History Preserving-Bisimulation für \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 , B heißt dann schwache History Preserving-Bisimulation für $\mathcal{E}_1 \approx_{whb} \mathcal{E}_2$, und man schreibt dafür auch $\mathcal{E}_1 \stackrel{B}{\approx}_{whb} \mathcal{E}_2$.

Im Vergleich zu Definition 10.13 entfällt also die Zusatzbedingung $f'|_{\text{Vis}(X)} = f$ in i) und ii).

BEMERKUNG 14.4

[Gla/Go]

Es genügt, in Definition 14.3 für eine schwache History Preserving-Bisimulation B in i) nur Transitionen $X \Longrightarrow_1 X'$ mit $|\text{Vis}(X' \setminus X)| \leq 1$ und in ii) nur Transitionen $Y \Longrightarrow_2 Y'$ mit $|\text{Vis}(Y' \setminus Y)| \leq 1$ zu betrachten.

¹ Der Begriff „schwach“ ist hier nicht im selben Sinn wie in Teil I. zu verstehen.

Beweis:

[Gla/Go]

vollständige Induktion nach $n = |\text{Vis}(X' \setminus X)| \in \mathbb{N}_0$. //

Das folgende Beispiel zeigt zunächst, daß im allgemeinen Fall (mit Eigenkonkurrenz) die schwache History Preserving-Bisimulation nicht die Pomset-Bisimulation impliziert:

BEISPIEL 14.5

vgl. [Gla/Go, De/DN/Mo b]

Die folgenden eigenkonkurrenten primen Ereignisstrukturen $\mathcal{E}_1 = (E_1, <_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, <_2, \#_2, l_2)$ sind schwach history preserving-bisimilar, aber nicht pomset failure-äquivalent (und damit auch nicht pomset-bisimilar). Sie sind aber partial word-bisimilar.



$$E_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

$$<_1 = \{(e_2, e_4), (e_3, e_5)\}$$

$$\#_1 = \{(e_1, e_2), (e_1, e_4), (e_2, e_1), (e_4, e_1), (e_4, e_5), (e_5, e_4)\}$$

$$l_1 = \{(e_1, a), (e_2, a), (e_3, a), (e_4, b), (e_5, b)\}$$

$$E_2 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

$$<_2 = \{(e_2, e_4), (e_3, e_5)\}$$

$$\#_2 = \{(e_1, e_2), (e_1, e_4), (e_2, e_1), (e_2, e_5), (e_4, e_1), (e_4, e_5), (e_5, e_2), (e_5, e_4)\}$$

$$l_2 = \{(e_1, a), (e_2, a), (e_3, a), (e_4, b), (e_5, b)\}$$

Beweis:

Die Konfigurationen von \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 sind:

$$\begin{aligned} \text{Conf}(\mathcal{E}_1) = & \left\{ \underbrace{\emptyset}_{X_0}, \underbrace{\{e_1\}}_{X_1}, \underbrace{\{e_2\}}_{X_2}, \underbrace{\{e_3\}}_{X_3}, \underbrace{\{e_1, e_3\}}_{X_4}, \underbrace{\{e_2, e_3\}}_{X_5}, \underbrace{\{e_2, e_4\}}_{X_6}, \underbrace{\{e_3, e_5\}}_{X_7}, \right. \\ & \left. \underbrace{\{e_1, e_3, e_5\}}_{X_8}, \underbrace{\{e_2, e_3, e_4\}}_{X_9}, \underbrace{\{e_2, e_3, e_5\}}_{X_{10}} \right\} \\ \text{Conf}(\mathcal{E}_2) = & \left\{ \underbrace{\emptyset}_{Y_0}, \underbrace{\{e_1\}}_{Y_1}, \underbrace{\{e_2\}}_{Y_2}, \underbrace{\{e_3\}}_{Y_3}, \underbrace{\{e_1, e_3\}}_{Y_4}, \underbrace{\{e_2, e_3\}}_{Y_5}, \underbrace{\{e_2, e_4\}}_{Y_6}, \underbrace{\{e_3, e_5\}}_{Y_7}, \right. \\ & \left. \underbrace{\{e_1, e_3, e_5\}}_{Y_8}, \underbrace{\{e_2, e_3, e_4\}}_{Y_9} \right\} \end{aligned}$$

Die folgende Relation ist eine schwache History Preserving-Bisimulation:

$$\begin{aligned} B = & \{(X_0, Y_0, \emptyset), \\ & (X_1, Y_1, \{(e_1, e_1)\}), \\ & (X_2, Y_2, \{(e_2, e_2)\}), \\ & (X_3, Y_3, \{(e_2, e_3)\})\}. \end{aligned}$$

$(X_3, Y_2, \{(e_3, e_2)\}),$
 $(X_3, Y_3, \{(e_3, e_3)\}),$
 $(X_4, Y_4, \{(e_1, e_1), (e_3, e_3)\}),$
 $(X_4, Y_5, \{(e_1, e_2), (e_3, e_3)\}),$
 $(X_5, Y_4, \{(e_2, e_1), (e_3, e_3)\}),$
 $(X_5, Y_5, \{(e_2, e_2), (e_3, e_3)\}),$
 $(X_6, Y_6, \{(e_2, e_2), (e_4, e_4)\}),$
 $(X_6, Y_7, \{(e_2, e_3), (e_4, e_5)\}),$
 $(X_7, Y_6, \{(e_3, e_2), (e_5, e_4)\}),$
 $(X_7, Y_7, \{(e_3, e_3), (e_5, e_5)\}),$
 $(X_8, Y_8, \{(e_1, e_1), (e_3, e_3), (e_5, e_5)\}),$
 $(X_8, Y_9, \{(e_1, e_3), (e_3, e_2), (e_5, e_4)\}),$
 $(X_9, Y_8, \{(e_2, e_3), (e_3, e_1), (e_4, e_5)\}),$
 $(X_9, Y_9, \{(e_2, e_2), (e_3, e_3), (e_4, e_4)\}),$
 $(X_{10}, Y_8, \{(e_2, e_1), (e_3, e_3), (e_5, e_5)\}),$
 $(X_{10}, Y_9, \{(e_2, e_3), (e_3, e_2), (e_5, e_4)\})$

Die Relation $\Pi_{1,2}(B)$ ist eine Partial Word Bisimulation.

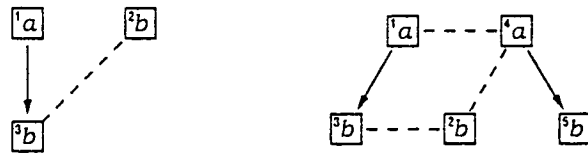
Wegen $Y_0 \Longrightarrow_2 Y_2$ gilt $(\boxed{a}, \{\boxed{a} \longrightarrow \boxed{b}\}) \in \text{pom failures}(\mathcal{E}_2)$, aber wegen $X_0 \Longrightarrow_1 X_1 \Longrightarrow_1 X_8$, $X_0 \Longrightarrow_1 X_2 \Longrightarrow_1 X_{10}$ und $X_0 \Longrightarrow_1 X_3 \Longrightarrow_1 X_9$ gilt $(\boxed{a}, \{\boxed{a} \longrightarrow \boxed{b}\}) \notin \text{pom failures}(\mathcal{E}_1)$ und damit $\mathcal{E}_1 \neq_{pf} \mathcal{E}_2$.

Umgekehrt impliziert die Pomset-Bisimulation auch im Spezialfall ohne Eigenkonkurrenz nicht die schwache History Preserving-Bisimulation:

BEISPIEL 14.6

[Gla/Go]

Die folgenden primen Ereignisstrukturen ohne Eigenkonkurrenz $\mathcal{E}_1 = (E_1, <_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, <_2, \#_2, l_2)$ sind pomset-bisimilar, aber nicht schwach history preserving-bisimilar:



$$E_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$$

$$<_1 = \{(e_1, e_3)\}$$

$$\#_1 = \{(e_2, e_3), (e_3, e_2)\}$$

$$l_1 = \{(e_1, a), (e_2, b), (e_3, b)\}$$

$$E_2 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

$$<_2 = \{(e_1, e_3), (e_4, e_5)\}$$

$$\#_2 = \{(e_1, e_4), (e_1, e_5), (e_2, e_3), (e_2, e_4), (e_2, e_5), (e_3, e_2), (e_3, e_4), (e_3, e_5), \\ (e_4, e_1), (e_4, e_2), (e_4, e_3), (e_5, e_1), (e_5, e_2), (e_5, e_3)\}$$

$$l_2 = \{(e_1, a), (e_2, b), (e_3, b), (e_4, a), (e_5, b)\}$$

Beweis:

Die Konfigurationen von \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 sind:

$$\begin{aligned} \text{Conf}(\mathcal{E}_1) &= \left\{ \underbrace{\emptyset}_{X_0}, \underbrace{\{e_1\}}_{X_1}, \underbrace{\{e_2\}}_{X_2}, \underbrace{\{e_1, e_2\}}_{X_3}, \underbrace{\{e_1, e_3\}}_{X_4} \right\} \\ \text{Conf}(\mathcal{E}_2) &= \left\{ \underbrace{\emptyset}_{Y_0}, \underbrace{\{e_1\}}_{Y_1}, \underbrace{\{e_2\}}_{Y_2}, \underbrace{\{e_4\}}_{Y_3}, \underbrace{\{e_1, e_2\}}_{Y_4}, \underbrace{\{e_1, e_3\}}_{Y_5}, \underbrace{\{e_4, e_5\}}_{Y_6} \right\} \end{aligned}$$

Die folgende Relation ist eine Pomset-Bisimulation:

$$B = \{(X_0, Y_0), (X_1, Y_1), (X_1, Y_3), (X_2, Y_2), (X_3, Y_4), \\ (X_4, Y_5), (X_4, Y_6), (X_3, Y_5), (X_4, Y_4), (X_3, Y_6)\}$$

Angenommen, es existiert eine schwache History Preserving-Bisimulation B . Wegen $Y_0 \Longrightarrow_2 Y_3$ muß gelten $(X_1, Y_3, \{(e_1, e_4)\}) \in B$, aber wegen $X_1 \Longrightarrow_1 X_3$ müßte gelten $(X_3, Y_6, \{(e_1, e_4), (e_2, e_5)\}) \in B$.

Es ist aber $[\text{Vis}(X_3)] = \boxed{a} \quad \boxed{b}$ ungleich $[\text{Vis}(Y_6)] = \boxed{a} \longrightarrow \boxed{b}$

und damit $\mathcal{E}_1 \not\approx_{whb} \mathcal{E}_2$.

Man kann nun die Pomset-Bisimulation so verschärfen, daß sie immer auch die schwache History Preserving-Bisimulation impliziert, indem man für alle Tripel (X, Y, f) zusätzlich noch $\text{Vis}(X) \equiv \text{Vis}(Y)$ fordert. Dabei muß die Funktion f nicht zwangsläufig auch den geforderten Isomorphismus darstellen:

DEFINITION 14.7

[Gla/Go]

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, \prec_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, \prec_2, \#_2, l_2)$ Ereignisstrukturen.

Eine Relation $B \subseteq \text{Conf}(\mathcal{E}_1) \times \text{Conf}(\mathcal{E}_2) \times (E_1 \rightarrow E_2)$ mit $(\emptyset, \emptyset, \emptyset) \in B$ heißt *schwache History Preserving Pomset-Bisimulation* für \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 ,

wenn B eine Pomset-Bisimulation (gemäß Lemma 10.15) mit der Eigenschaft $\text{Vis}(X) \equiv \text{Vis}(Y) \forall (X, Y, f) \in B$ ist.

Man definiert $\mathcal{E}_1 \approx_{whpb} \mathcal{E}_2 \Leftrightarrow \exists B$ schwache History Preserving Pomset-Bisimulation für \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 , B heißt dann schwache History Preserving Pomset-Bisimulation für $\mathcal{E}_1 \approx_{whpb} \mathcal{E}_2$, und man schreibt dafür auch $\mathcal{E}_1 \stackrel{B}{\approx}_{whpb} \mathcal{E}_2$.

SATZ 14.8

[Gla/Go]

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, \prec_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, \prec_2, \#_2, l_2)$ Ereignisstrukturen mit $\mathcal{E}_1 \approx_{whpb} \mathcal{E}_2$. Dann gilt $\mathcal{E}_1 \approx_{whb} \mathcal{E}_2$ und $\mathcal{E}_1 \approx_{pb} \mathcal{E}_2$.

Beweis:

klar

SATZ 14.9

[Gla/Go]

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, \prec_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, \prec_2, \#_2, l_2)$ Ereignisstrukturen mit $\mathcal{E}_1 \approx_{hb} \mathcal{E}_2$. Dann gilt $\mathcal{E}_1 \approx_{whpb} \mathcal{E}_2$.

Beweis:

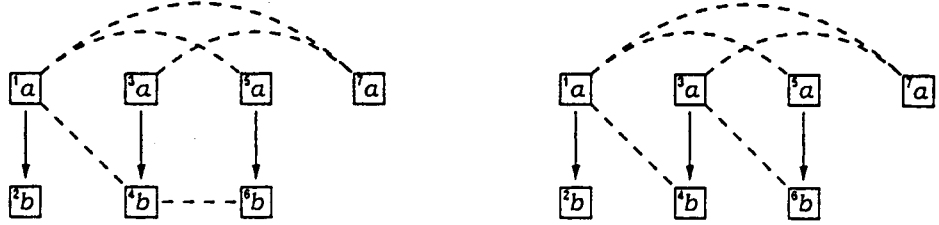
Nach Satz 10.16 gilt bereits $\mathcal{E}_1 \approx_{pb} \mathcal{E}_2$, und aus Definition 10.13 folgt unmittelbar $\text{Vis}(X) \stackrel{f}{\equiv} \text{Vis}(Y)$ für alle $(X, Y, f) \in B$. //

Aber auch die verschärfte Form der Pomset-Bisimulation impliziert im allgemeinen Fall (mit Eigenkonkurrenz) nicht die History Preserving-Bisimulation und auch keine der ST-Bisimulationen:

BEISPIEL 14.10

[Gla/Go]

Die folgenden eigenkonkurrenten primen Ereignisstrukturen $\mathcal{E}_1 = (E_1, <_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, <_2, \#_2, l_2)$ sind schwach history preserving pomset-bisimilar, aber weder history preserving-bisimilar noch interleaving-ST-bisimilar:



$$E_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$$

$$<_1 = \{(e_1, e_2), (e_3, e_4), (e_5, e_6)\}$$

$$\#_1 = \{(e_1, e_4), (e_1, e_5), (e_1, e_6), (e_1, e_7), (e_2, e_4), (e_2, e_5), (e_2, e_6), (e_2, e_7), \\ (e_3, e_7), (e_4, e_1), (e_4, e_2), (e_4, e_6), (e_4, e_7), (e_5, e_1), (e_5, e_2), (e_6, e_1), \\ (e_6, e_2), (e_6, e_4), (e_7, e_1), (e_7, e_2), (e_7, e_3), (e_7, e_4)\}$$

$$l_1 = \{(e_1, a), (e_2, b), (e_3, a), (e_4, b), (e_5, a), (e_6, b), (e_7, a)\}$$

$$E_2 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$$

$$<_2 = \{(e_1, e_2), (e_3, e_4), (e_5, e_6)\}$$

$$\#_2 = \{(e_1, e_4), (e_1, e_5), (e_1, e_6), (e_1, e_7), (e_2, e_4), (e_2, e_5), (e_2, e_6), (e_2, e_7), \\ (e_3, e_6), (e_3, e_7), (e_4, e_1), (e_4, e_2), (e_4, e_6), (e_4, e_7), (e_5, e_1), (e_5, e_2), \\ (e_6, e_1), (e_6, e_2), (e_6, e_3), (e_6, e_4), (e_7, e_1), (e_7, e_2), (e_7, e_3), (e_7, e_4)\}$$

$$l_2 = \{(e_1, a), (e_2, b), (e_3, a), (e_4, b), (e_5, a), (e_6, b), (e_7, a)\}$$

Beweis:

Die Konfigurationen von \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 sind:

$$\begin{aligned} \text{Conf}(\mathcal{E}_1) = & \left\{ \emptyset, \underbrace{\{e_1\}}_{X_0}, \underbrace{\{e_3\}}_{X_1}, \underbrace{\{e_5\}}_{X_2}, \underbrace{\{e_7\}}_{X_3}, \underbrace{\{e_1, e_2\}}_{X_4}, \underbrace{\{e_1, e_3\}}_{X_5}, \underbrace{\{e_3, e_4\}}_{X_6}, \underbrace{\{e_3, e_5\}}_{X_7}, \underbrace{\{e_5, e_6\}}_{X_8}, \right. \\ & \left. \underbrace{\{e_5, e_7\}}_{X_9}, \underbrace{\{e_1, e_2, e_3\}}_{X_{10}}, \underbrace{\{e_3, e_4, e_5\}}_{X_{11}}, \underbrace{\{e_3, e_5, e_6\}}_{X_{12}}, \underbrace{\{e_5, e_6, e_7\}}_{X_{13}} \right\} \\ \text{Conf}(\mathcal{E}_2) = & \left\{ \emptyset, \underbrace{\{e_1\}}_{Y_0}, \underbrace{\{e_3\}}_{Y_1}, \underbrace{\{e_5\}}_{Y_2}, \underbrace{\{e_7\}}_{Y_3}, \underbrace{\{e_1, e_2\}}_{Y_4}, \underbrace{\{e_1, e_3\}}_{Y_5}, \underbrace{\{e_3, e_4\}}_{Y_6}, \underbrace{\{e_3, e_5\}}_{Y_7}, \underbrace{\{e_5, e_6\}}_{Y_8}, \right. \\ & \left. \underbrace{\{e_5, e_7\}}_{Y_9}, \underbrace{\{e_1, e_2, e_3\}}_{Y_{10}}, \underbrace{\{e_3, e_4, e_5\}}_{Y_{11}}, \underbrace{\{e_5, e_6, e_7\}}_{Y_{12}} \right\} \end{aligned}$$

Die folgende Relation ist eine History Preserving-Bisimulation:

$$\begin{aligned}
 B = & \{(X_0, Y_0, \emptyset), \\
 & (X_1, Y_1, \{(e_1, e_1)\}), \\
 & (X_2, Y_2, \{(e_3, e_3)\}), \\
 & (X_3, Y_3, \{(e_5, e_5)\}), \\
 & (X_4, Y_4, \{(e_7, e_7)\}), \\
 & (X_5, Y_5, \{(e_1, e_1), (e_2, e_2)\}), \\
 & (X_6, Y_6, \{(e_1, e_1), (e_3, e_3)\}), \\
 & (X_7, Y_7, \{(e_3, e_3), (e_4, e_4)\}), \\
 & (X_8, Y_8, \{(e_3, e_3), (e_5, e_5)\}), \\
 & (X_9, Y_9, \{(e_5, e_5), (e_6, e_6)\}), \\
 & (X_{10}, Y_{10}, \{(e_5, e_5), (e_7, e_7)\}), \\
 & (X_{11}, Y_{11}, \{(e_1, e_1), (e_2, e_2), (e_3, e_3)\}), \\
 & (X_{12}, Y_{12}, \{(e_3, e_3), (e_4, e_4), (e_5, e_5)\}), \\
 & (X_{13}, Y_{11}, \{(e_3, e_3), (e_5, e_1), (e_6, e_2)\}), \\
 & (X_{13}, Y_{13}, \{(e_3, e_7), (e_5, e_5), (e_6, e_6)\}), \\
 & (X_{14}, Y_{13}, \{(e_5, e_5), (e_6, e_6), (e_7, e_7)\}), \\
 & (X_{13}, Y_{12}, \{(e_3, e_3), (e_5, e_5), (e_6, e_4)\})\}
 \end{aligned}$$

Nur in dem letzten Tupel $(X_{13}, Y_{12}, \{(e_3, e_3), (e_5, e_5), (e_6, e_4)\})$ ist die Funktion f kein Isomorphismus zwischen $\text{Vis}(X)$ und $\text{Vis}(Y)$, aber die Funktion $g := \{(e_3, e_5), (e_5, e_3), (e_6, e_4)\}$ hat die geforderte Eigenschaft $\text{Vis}(X_{13}) \stackrel{g}{\cong} \text{Vis}(Y_{12})$, und damit gilt $\mathcal{E}_1 \approx_{\text{whpb}} \mathcal{E}_2$.

Angenommen, es existiert eine Interleaving-ST-Bisimulation B .

Wegen $(Y_0, Y_0) \longrightarrow_2 (Y_2, Y_0)$ muß gelten:

$$\exists i \in \{1, 2, 3, 4\}: ((X_i, X_0), (Y_2, Y_0), f) \in B.$$

Fall i) $((X_1, X_0), (Y_2, Y_0), \{(e_1, e_3)\}) \in B$

Es gilt $(Y_2, Y_0) \longrightarrow_2 (Y_{11}, Y_5)$, $e_3 \in Y_{11} \setminus Y_5$, aber wegen $e_1 <_1 e_2$, $e_1 \#_1 e_4$ und $e_1 \#_1 e_6$ gibt es keine Transition von (X_1, X_0) aus, die eine Aktion b enthält und bei der das Ereignis e_1 aktiv bleibt. \nexists

Fall ii) $((X_2, X_0), (Y_2, Y_0), \{(e_3, e_3)\}) \in B$

Es gilt $(X_2, X_0) \longrightarrow_1 (X_8, X_0)$, also muß gelten:

iiia) $((X_8, X_0), (Y_6, Y_0), \{(e_3, e_3), (e_5, e_1)\}) \in B$,

dann folgt $(X_8, X_0) \longrightarrow_1 (X_{12}, X_2)$, $e_5 \in X_{12} \setminus X_2$,

aber wegen $e_1 <_2 e_2$, $e_1 \#_2 e_4$ und $e_1 \#_2 e_6$ gibt es keine Transition von (Y_6, Y_0) aus, die eine Aktion b enthält und bei der das Ereignis e_1 aktiv bleibt. \nexists

oder:

iiib) $((X_8, X_0), (Y_8, Y_0), \{(e_3, e_3), (e_5, e_5)\}) \in B$,

dann folgt $(X_8, X_0) \longrightarrow_1 (X_{13}, X_3)$, $e_3 \in X_{13} \setminus X_3$, $e_5 \in X_3$,

aber wegen $e_5 \#_2 e_2$, $e_3 <_2 e_4$ und $e_3 \#_2 e_6$ gibt es keine Transition von (Y_8, Y_0) aus, die eine Aktion b enthält und bei der das Ereignis e_3 aktiv bleibt. \nexists

Fall iii) $((X_3, X_0), (Y_2, Y_0), ((e_5, e_3))) \in B$

Es gilt $(X_3, X_0) \longrightarrow_1 (X_8, X_0)$, also muß gelten:

iiia) $((X_8, X_0), (Y_6, Y_0), ((e_5, e_3), (e_3, e_1))) \in B$,

dann folgt $(X_8, X_0) \longrightarrow_1 (X_{13}, X_3)$, $e_3 \in X_{13} \setminus X_3$,

aber wegen $e_1 <_2 e_2$, $e_1 \#_2 e_4$ und $e_1 \#_2 e_6$ gibt es keine Transition von (Y_6, Y_0) aus, die eine Aktion b enthält und bei der das Ereignis e_1 aktiv bleibt. \nmid

oder:

iiib) $((X_8, X_0), (Y_8, Y_0), ((e_5, e_3), (e_3, e_5))) \in B$,

dann folgt $(X_8, X_0) \longrightarrow_1 (X_{12}, X_2)$, $e_5 \in X_{12} \setminus X_2$, $e_3 \in X_2$,

aber wegen $e_5 \#_2 e_2$, $e_3 <_2 e_4$ und $e_3 \#_2 e_6$ gibt es keine Transition von (Y_8, Y_0) aus, die eine Aktion b enthält und bei der das Ereignis e_3 aktiv bleibt. \nmid

Fall iv) $((X_4, X_0), (Y_2, Y_0), ((e_7, e_3))) \in B$

Es gilt $(X_4, X_0) \longrightarrow_1 (X_4, X_4)$, also folgt $((X_4, X_4), (Y_2, Y_2), ((e_7, e_3))) \in B$.

Es gilt weiter $(Y_2, Y_2) \longrightarrow_2 (Y_7, Y_7)$, aber wegen $e_1 <_1 e_2$, $e_3 <_1 e_4$ und $e_5 <_1 e_6$ ist von (X_4, X_4) aus keine Aktion b unmittelbar ausführbar. \nmid

Es gilt also insgesamt $\mathcal{E}_1 \neq_{\text{bST}} \mathcal{E}_2$.

Da die Ereignisstrukturen keine unsichtbaren Aktionen enthalten, können sie damit auch nicht history preserving-bisimilar sein, da sie sonst nach Satz 12.21 sofort auch history preserving-ST-bisimilar wären.

SATZ 14.11

[Gla/Go]

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, <_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, <_2, \#_2, l_2)$ Ereignisstrukturen ohne Eigenkonkurrenz mit $\mathcal{E}_1 \approx_{\text{whb}} \mathcal{E}_2$. Dann gilt $\mathcal{E}_1 \approx_{\text{hb}} \mathcal{E}_2$.

Beweis:

[Gla/Go]

Es existiert eine schwache History Preserving-Bisimulation B .

Es sei $(X, Y, f) \in B$ und $X \longrightarrow_1 X' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_1)$ beliebig.

Dann existieren $(X', Y', f') \in B$ mit $Y \longrightarrow_2 Y' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_2)$,

und es gelten $\text{Vis}(X) \stackrel{f}{\equiv} \text{Vis}(Y)$ und $\text{Vis}(X') \stackrel{f'}{\equiv} \text{Vis}(Y')$.

Hilfsbehauptung 1)

Für alle $e \in \text{Vis}(X)$ und $X, X' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_1)$, $X \longrightarrow_1 X'$ gilt:

$(d \in \text{Vis}(X') \wedge d <_{X'} e) \Leftrightarrow (d \in \text{Vis}(X) \wedge d <_X e)$.

(*)

Angenommen, es existiert ein $d \in \text{Vis}(X' \setminus X)$ mit $d <_{X'} e$,

dann existiert ein $f \in X$ mit $f <_X e$ und $f \# d$, aber es gilt $f, d \in X'$. \nmid

Hilfsbehauptung 2)

Für alle $e \in \text{Vis}(X)$ und Isomorphismen $f: \text{Vis}(X) \rightarrow \text{Vis}(Y)$ gilt:

$|\{d \in \text{Vis}(X) \mid d <_X e\}| = |\{f \in \text{Vis}(Y) \mid f <_Y f(e)\}|$

(**)

Die Behauptung folgt unmittelbar aus der Isomorphismeigenschaft.

Angenommen, es gilt $f'|_{\text{Vis}(X)} \neq f$.

Dann existiert ein $e \in \text{Vis}(X)$ mit $f'(e) \neq f(e)$.

Mit den Hilfsbehauptungen gilt:

$$\begin{aligned}
 \left\{ \{d \in \text{Vis}(Y') \mid d <_{Y'} f(e)\} \right\} &\stackrel{\square}{=} \left\{ \{d \in \text{Vis}(Y) \mid d <_Y f(e)\} \right\} \\
 &\stackrel{\square}{=} \left\{ \{d \in \text{Vis}(X) \mid d <_X e\} \right\} \\
 &\stackrel{\square}{=} \left\{ \{d \in \text{Vis}(X') \mid d <_{X'} e\} \right\} \\
 &\stackrel{\square}{=} \left\{ \{d \in \text{Vis}(Y') \mid d <_{Y'} f'(e)\} \right\}
 \end{aligned}$$

Daraus folgt $f(e) <_{Y'} f'(e)$ und $f'(e) <_{Y'} f(e)$, also gilt $f(e) \text{co}_{Y'} f'(e)$.

Da aber f, f' markierungserhaltende Bijektionen sind, muß gelten

$l_2(f'(e)) = l_1(e) = l_2(f(e))$, und \mathcal{E}_2 hat damit Eigenkonkurrenz. \sharp

Also gilt $f'|_{\text{Vis}(X)} = f$, und aus Symmetriegründen ist B damit eine History Preserving-Bisimulation. //

KOROLLAR 14.12

Wenn $\mathcal{E}_1 = (E_1, <_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, <_2, \#_2, l_2)$ Ereignisstrukturen ohne Eigenkonkurrenz sind, dann gilt $\mathcal{E}_1 \approx_{hb} \mathcal{E}_2 \Leftrightarrow \mathcal{E}_1 \approx_{whpb} \mathcal{E}_2 \Leftrightarrow \mathcal{E}_1 \approx_{whb} \mathcal{E}_2$.

Wenn $\mathcal{E}_1 = (E_1, <_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, <_2, \#_2, l_2)$ Ereignisstrukturen ohne Eigenkonkurrenz und ohne unsichtbare Aktionen sind, dann gilt

$$\mathcal{E}_1 \approx_{hbST} \mathcal{E}_2 \Leftrightarrow \mathcal{E}_1 \approx_{hb} \mathcal{E}_2 \Leftrightarrow \mathcal{E}_1 \approx_{whpb} \mathcal{E}_2 \Leftrightarrow \mathcal{E}_1 \approx_{whb} \mathcal{E}_2$$

Beweis:

Satz 14.9, Satz 14.8, Satz 14.11, Satz 12.18 und Satz 12.21. //

BEMERKUNG 14.13

Die pomset-ST-bisimularen (aber nicht history preserving-bisimularen) Ereignisstrukturen aus Beispiel 12.11 sind ohne Eigenkonkurrenz und deshalb auch nicht schwach history preserving-bisimilar.

SATZ 14.14

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, <_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, <_2, \#_2, l_2)$ Ereignisstrukturen mit $\mathcal{E}_1 \approx_{whb} \mathcal{E}_2$. Dann gilt $\mathcal{E}_1 \approx_{pt} \mathcal{E}_2$.

Beweis:

Es existiert eine schwache History Preserving-Bisimulation B .

Es sei $p \in \text{pomsets}(\mathcal{E}_1)$, dann gilt $\emptyset \xrightarrow{p}_1 X \in \text{Conf}(\mathcal{E}_1)$,

und somit existiert $Y \in \text{Conf}(\mathcal{E}_2)$ mit $\emptyset \xrightarrow{\quad}_2 Y, (X, Y, f) \in B$.

Wegen $\text{Vis}(X) \stackrel{f}{=} \text{Vis}(Y)$ und $p = [\text{Vis}(X)]$ gilt sofort $\emptyset \xrightarrow{p}_2 Y$ und damit $p \in \text{pomsets}(\mathcal{E}_2)$.

Aus Symmetriegründen folgt $\mathcal{E}_1 \approx_{pt} \mathcal{E}_2$. //

SATZ 14.15

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, <_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, <_2, \#_2, l_2)$ Ereignisstrukturen mit $\mathcal{E}_1 \approx_{whb} \mathcal{E}_2$. Dann gilt $\mathcal{E}_1 \approx_{wb} \mathcal{E}_2$.

Beweis:

Es existiert eine schwache History Preserving-Bisimulation \bar{B} ,
man definiert $B := \Pi_{1,2}(\bar{B})$.

Es sei $(X, Y) \in B$, $\alpha \in \text{Vis} \cup \{\varepsilon\}$ beliebig und gelte $X \xrightarrow{\alpha}_1 X' \in \text{Conf}(e_1)$.

Dann existiert $Y' \in \text{Conf}(\mathcal{E}_2)$ mit $Y \xrightarrow{\alpha}_2 Y'$, $(X', Y') \in B$,
 $\text{Vis}(X) \equiv \text{Vis}(Y)$ und $\text{Vis}(X') \equiv \text{Vis}(Y')$.

Fall 1) $\alpha = \varepsilon$

Dann gilt sofort $\text{Vis}(X) \equiv \text{Vis}(X') \equiv \text{Vis}(Y') \equiv \text{Vis}(Y)$ und damit $Y \xrightarrow{\varepsilon}_2 Y'$.

Fall 2) $\alpha \in \text{Vis}$

Es gilt:

$$\begin{aligned} |\{e \in \text{Vis}(Y') \mid l_2(e) = \alpha\}| &= |\{e \in \text{Vis}(X') \mid l_1(e) = \alpha\}| \\ &= |\{e \in \text{Vis}(X) \mid l_1(e) = \alpha\}| + 1 \\ &= |\{e \in \text{Vis}(Y) \mid l_2(e) = \alpha\}| + 1 \end{aligned}$$

und daraus folgt direkt $Y \xrightarrow{\alpha}_2 Y'$.

Aus Symmetriegründen folgt, daß B eine Interleaving-Bisimulation ist
und damit $\mathcal{E}_1 \approx_{\text{ib}} \mathcal{E}_2$. //

SATZ 14.16

Die Relationen \approx_{whb} und \approx_{whpb} sind Äquivalenzrelationen.

Beweis:

analog §2

§15 Transitionssysteme, Bäume, Pomsets

In den vorangegangenen Kapiteln wurden alle Äquivalenzrelationen auf den Mengen der Konfigurationen von Ereignisstrukturen definiert. Tatsächlich lassen sich aber einige davon auch äquivalent auf den Pomsets der Ereignisstrukturen bzw. auf speziellen abgeleiteten Transitionssystemen bzw. Bäumen definieren.

Speziell die Interleaving-Bisimulation, die Interleaving Failure-Äquivalenz und die Interleaving Trace-Äquivalenz übertragen sich sofort in natürlicher Weise auf Transitionssysteme:

BEMERKUNG 15.1

Es sei $\mathcal{E} = (E, <, \#, l)$ eine Ereignisstruktur. Man definiert das Transitionssystem $\text{trans}(\mathcal{E}) := (\text{Conf}(\mathcal{E}), D, \emptyset)$ mit $(X, \alpha, X') \in D \Leftrightarrow (X \subseteq X' \wedge X' \setminus X = \{e\}, l(e) = \alpha)$. Für zwei Ereignisstrukturen $\mathcal{E}_1 = (E_1, <_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, <_2, \#_2, l_2)$ gilt:

- i) $\mathcal{E}_1 \approx_b \mathcal{E}_2 \Leftrightarrow \text{trans}(\mathcal{E}_1) \approx \text{trans}(\mathcal{E}_2)$
- ii) $\mathcal{E}_1 \approx_f \mathcal{E}_2 \Leftrightarrow \text{trans}(\mathcal{E}_1) \approx_{wf} \text{trans}(\mathcal{E}_2)$
- iii) $\mathcal{E}_1 \approx_t \mathcal{E}_2 \Leftrightarrow \text{trans}(\mathcal{E}_1) \approx_{tr} \text{trans}(\mathcal{E}_2)$

Beweis:

klar

Mit Definition 7.2 und Korollar 7.6 übertragen sich diese Äquivalenzen sofort auch auf Bäume:

BEMERKUNG 15.2

Für zwei Ereignisstrukturen $\mathcal{E}_1 = (E_1, <_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, <_2, \#_2, l_2)$ gilt:

- i) $\mathcal{E}_1 \approx_b \mathcal{E}_2 \Leftrightarrow \text{tree}(\text{trans}(\mathcal{E}_1)) \approx \text{tree}(\text{trans}(\mathcal{E}_2))$
- ii) $\mathcal{E}_1 \approx_f \mathcal{E}_2 \Leftrightarrow \text{tree}(\text{trans}(\mathcal{E}_1)) \approx_{wf} \text{tree}(\text{trans}(\mathcal{E}_2))$
- iii) $\mathcal{E}_1 \approx_t \mathcal{E}_2 \Leftrightarrow \text{tree}(\text{trans}(\mathcal{E}_1)) \approx_{tr} \text{tree}(\text{trans}(\mathcal{E}_2))$

Beispiel 11.8 zeigt aber, daß keine der anderen Äquivalenzrelationen für Ereignisstrukturen auf diesen abgewinkelten Bäumen definiert werden kann.

Betrachtet man hingegen nicht nur Transitionssysteme über der Menge Act , sondern erlaubt Kanten, die mit Steps markiert sind, dann ist auch für die Step-Äquivalenzen eine Definition auf Transitionssystemen möglich:

BEMERKUNG 15.3

Es sei $\mathcal{E} = (E, <, \#, l)$ eine Ereignisstruktur. Man definiert das Transitionssystem $\text{trans}_{\text{step}}(\mathcal{E}) := (\text{Conf}(\mathcal{E}), D, \emptyset)$ über $\mathbb{N}_0^{\text{vis}}$ mit $(X, A, X') \in D \Leftrightarrow X \xrightarrow{A} X'$.

Für zwei Ereignisstrukturen $\mathcal{E}_1 = (E_1, <_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, <_2, \#_2, l_2)$ gilt:

- i) $\mathcal{E}_1 \approx_{sb} \mathcal{E}_2 \Leftrightarrow \text{trans}_{\text{step}}(\mathcal{E}_1) \sim \text{trans}_{\text{step}}(\mathcal{E}_2)$
- ii) $\mathcal{E}_1 \approx_{sf} \mathcal{E}_2 \Leftrightarrow \text{trans}_{\text{step}}(\mathcal{E}_1) \sim_f \text{trans}_{\text{step}}(\mathcal{E}_2)$
- iii) $\mathcal{E}_1 \approx_{st} \mathcal{E}_2 \Leftrightarrow \text{trans}_{\text{step}}(\mathcal{E}_1) \sim_{tr} \text{trans}_{\text{step}}(\mathcal{E}_2)$

Beweis:

klar

Erlaubt man schließlich Kanten, die mit Pomsets markiert sind, dann ist für die Pomset-Äquivalenzen ebenfalls eine Definition auf Transitionssystemen möglich:

BEMERKUNG 15.4

Es sei $\mathcal{E} = (E, \prec, \#, l)$ eine Ereignisstruktur. Man definiert das Transitionssystem $\text{trans}_{\text{pomset}}(\mathcal{E}) := (\text{Conf}(\mathcal{E}), D, \emptyset)$ über \mathbb{P} mit $(X, p, X') \in D \Leftrightarrow X \xrightarrow{p} X'$.

Für zwei Ereignisstrukturen $\mathcal{E}_1 = (E_1, \prec_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, \prec_2, \#_2, l_2)$ gilt:

- i) $\mathcal{E}_1 \approx_{pb} \mathcal{E}_2 \Leftrightarrow \text{trans}_{\text{pomset}}(\mathcal{E}_1) \sim \text{trans}_{\text{pomset}}(\mathcal{E}_2)$
- ii) $\mathcal{E}_1 \approx_{pf} \mathcal{E}_2 \Leftrightarrow \text{trans}_{\text{pomset}}(\mathcal{E}_1) \sim_f \text{trans}_{\text{pomset}}(\mathcal{E}_2)$
- iii) $\mathcal{E}_1 \approx_{pt} \mathcal{E}_2 \Leftrightarrow \text{trans}_{\text{pomset}}(\mathcal{E}_1) \sim_{tr} \text{trans}_{\text{pomset}}(\mathcal{E}_2)$

Beweis:

klar

Eine andere Möglichkeit ist (wie bereits oben erwähnt) die Betrachtung von Äquivalenzrelationen auf der Menge der Pomsets.

Während die Pomset Trace-Äquivalenz (Definition 11.17) und die Partial Word Trace-Äquivalenz (Definition 11.13) beide bereits auf den Pomsets definiert sind, lassen sich die Definitionen der Step Traces (Definition 11.5) und der Interleaving Traces (Definition 11.1) einfach übertragen.

BEMERKUNG 15.5

Es seien $\mathcal{E}_1 = (E_1, \prec_1, \#_1, l_1)$ und $\mathcal{E}_2 = (E_2, \prec_2, \#_2, l_2)$ zwei Ereignisstrukturen.

Dann gilt:

$$\text{seq traces}(\mathcal{E}) = \left\{ \omega \in \text{Vis}^* \mid \exists \mathcal{P} \in p \in \text{pomsets}(\mathcal{E}): \emptyset \xrightarrow{\omega}_p \right\}$$

und:

$$\text{step traces}(\mathcal{E}) = \left\{ W \in (\mathbb{N}_0^{\text{Vis}})^* \mid \exists \mathcal{P} \in p \in \text{pomsets}(\mathcal{E}): \emptyset \xrightarrow{W}_p \right\}$$

Beweis:

klar

Es ist unmittelbar klar, daß die Pomset Trace-Äquivalenz die stärkste überhaupt mögliche Äquivalenzrelation auf den Pomsets von Ereignisstrukturen ist, und wegen Beispiel 13.27 ist damit auch klar, daß keine der anderen Äquivalenzrelationen auf Pomsets definiert werden kann.

§16 Zusammenfassung

ÜBERSICHT 16.1

Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über die definierten Äquivalenzrelationen und deren Bezeichnungen.

\approx_{ib}	Interleaving-Bisimulation	Definition 10.1
\approx_{sb}	Step-Bisimulation	Definition 10.3
\approx_{pwb}	Partial Word-Bisimulation	Definition 10.7
\approx_{pb}	Pomset-Bisimulation	Definition 10.10
\approx_{hb}	History Preserving-Bisimulation	Definition 10.13
\approx_{it}	Interleaving Trace-Äquivalenz	Definition 11.3
\approx_{st}	Step Trace-Äquivalenz	Definition 11.7
\approx_{pwt}	Partial Word Trace-Äquivalenz	Definition 11.13
\approx_{pt}	Pomset Trace-Äquivalenz	Definition 11.17
\approx_{ibST}	Interleaving-ST-Bisimulation	Definition 12.3
\approx_{pwST}	Partial Word-ST-Bisimulation	Definition 12.6
\approx_{pbST}	Pomset-ST-Bisimulation	Definition 12.10
\approx_{hbST}	History Preserving-ST-Bisimulation	Definition 12.14
\approx_{if}	Interleaving Failure-Äquivalenz	Definition 13.3
\approx_{sf}	Step Failure-Äquivalenz	Definition 13.8
\approx_{pwf}	Partial Word Failure-Äquivalenz	Definition 13.15
\approx_{pf}	Pomset Failure-Äquivalenz	Definition 13.22
\approx_{whb}	schwache History Preserving-Bisimulation	Definition 14.3
\approx_{whpb}	schwache History Preserving Pomset-Bisimulation	Definition 14.7

ÜBERSICHT 16.2

Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über die bewiesenen Implikationen und Gegenbeispiele. Dabei bedeutet „ $x \Rightarrow y$ “ stets:

$\mathcal{E}_1 \approx_x \mathcal{E}_2 \Rightarrow \mathcal{E}_1 \approx_y \mathcal{E}_2$ für alle Transitionssysteme $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \in \mathbb{E}$.

Weiter bedeutet:

- \Rightarrow Implikation gilt für alle $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$
- * \Rightarrow Implikation gilt für alle $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ ohne unsichtbare Aktionen, sonst i.a. nicht
- ** \Rightarrow Implikation gilt für alle $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ ohne Eigenkonkurrenz, sonst i.a. nicht
- *** \Rightarrow Implikation gilt für alle $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ ohne Eigenkonkurrenz und ohne unsichtbare Aktionen, sonst i.a. nicht

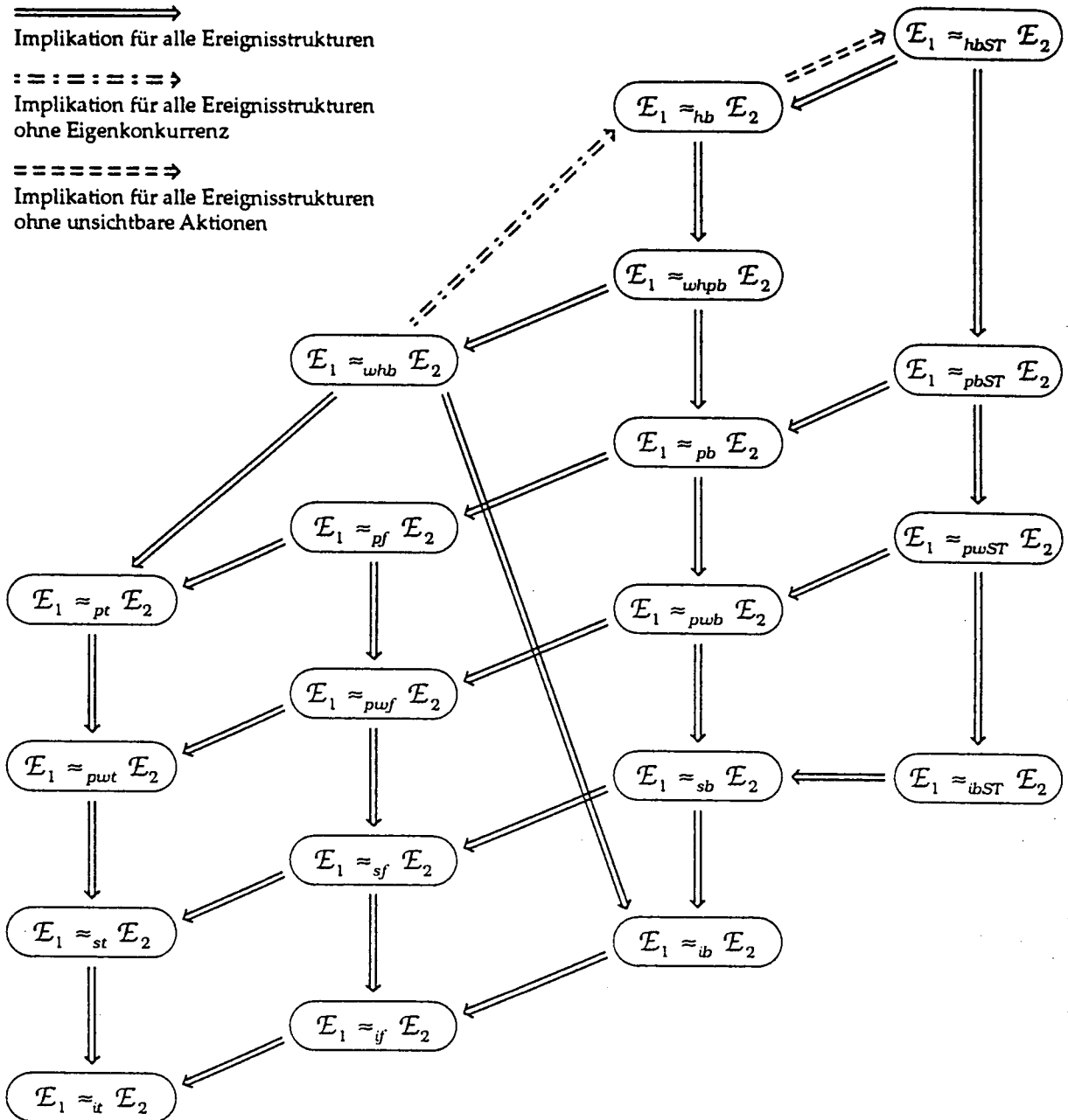
- **** \Rightarrow Implikation gilt für alle $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ ohne Eigenkonkurrenz,
 der allgemeine Fall ist noch ungeklärt.
- \neg Implikation gilt auch für $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ ohne unsichtbare Aktionen und
 ohne Eigenkonkurrenz i.a. nicht

	hb	pb	pwb	sb	ib	pt	pwt	st	it	hbST	pbST	pwtST	ibST	pf	pwf	sf	if	whpb	whb	
hb	↔	⇒10.16								⇒ 12.21 12.15				⇒10.16				⇒14.9		
pb	10.14	↔	⇒10.12				⇒11.20				12.16				⇒13.24				14.6	
pwb		10.11	↔	⇒10.9			11.18	⇒11.16							11.18	⇒13.17				
sb			10.8	↔	⇒10.6			11.14	⇒11.10							11.14	⇒13.10			
ib				10.5		↔			11.8	⇒11.4							11.8	⇒13.4		
pt	11.21					↔	⇒11.19			11.21				13.27						
pwt						11.18	↔	⇒11.15												
st							11.14	↔	⇒11.9											
it								11.8	↔											
hbST	⇒12.18									↔	⇒12.17							⇒12.18		
pbST	12.11	⇒12.13								12.11	↔	⇒12.12			⇒12.13				14.13	
pwtST		12.7	⇒12.9				12.7	⇒12.9			12.7	⇒12.9								
ibST			12.4			12.20		12.5	12.4			12.20	12.4	↔		12.4	12.20			
pf	13.28					⇒13.25				13.28				↔	⇒13.23				14.13	
pwf						11.18	⇒13.18							13.26	↔	⇒13.16				
sf							11.14	⇒13.11							13.19	↔	⇒13.9			
if								11.8								⇒13.5	13.12	↔		
whpb		⇒14.8												⇒14.8				↔	14.8	
whb	⇒ 14.11 14.10	⇒ 14.11 14.5	⇒ 14.11			⇒14.15	⇒14.14			⇒ 14.12 14.10 12.15				⇒ 14.11 14.5	⇒ 14.11	⇒14.15		⇒ 14.12 14.5	↔	

Beispiel 10.17 liefert (mit Bemerkung 12.22) außerdem noch history preserving-ST-bisimulare Ereignisstrukturen ohne unsichtbare Aktionen, die nicht isomorph sind.

ÜBERSICHT 16.3

Die folgende Graphik gibt eine Übersicht über die Implikationen im allgemeinen Fall.



Im allgemeinen (eigenkonkurrenten) Fall ist noch ungeklärt, ob die schwache History Preserving-Bisimulation die Partial Word-Bisimulation, die Partial Word Failure-Äquivalenz, die Step-Bisimulation bzw. die Step Failure-Äquivalenz impliziert.

Anhang

Literaturverzeichnis

- [Baier] C. Baier
„Transitionssystem- und Baum-Semantiken für CCS“
Doktorarbeit, Universität Mannheim, 1994
- [Ba/MC] C. Baier, M. E. Majster-Cederbaum
„Algebraic Metric Spaces for Modelling Concurrency
and Communication“
Reihe Informatik 2/93, 1993
- [Bo/Ca] G. Boudol, I. Castellani
„On the Semantics of Concurrency: Partial Orders
and Transition Systems“
LNCS 249, Springer-Verlag, 1987
- [Cz/Gla/Go] I. Czaja, R. J. van Glabbeek, U. Goltz
„Interleaving Semantics and Action Refinement with Atomic Choice“
Arbeitspapiere der GMD 594, 1991
- [De/DN/Mo a] P. Degano, R. DeNicola, U. Montanari
„Observational Equivalences for Concurrency Models“
in:
„Formal Description of Programming Concepts III“
Elsevier Science Publishers / North Holland, 1987
- [De/DN/Mo b] P. Degano, R. DeNicola, U. Montanari
„Partial Ordering Descriptions of Nondeterministic
Concurrent Processes“
in:
„Linear Time, Branching Time and Partial Order in Logics
and Models for Concurrency“
LNCS 345, Springer-Verlag, 1989
- [DN/He a] R. DeNicola, M. C. B. Hennessy
„Testing Equivalences for Processes“
Theoretical Computer Science 34, 1984
- [DN/He b] R. DeNicola, M. C. B. Hennessy
„CCS without τ 's“
LNCS 249, Springer-Verlag, 1987
- [Glabbeek] R. J. van Glabbeek
„The Refinement Theorem for ST-Bisimulation Semantics“
Proc. IFIP

- [Gla/Go] R. J. van Glabbeek, U. Goltz
 „Equivalences and Refinement“
 SFB-Bericht Nr. 342/12/90 A, 1990
 und in:
 „Semantics of Systems of Concurrent Processes“
 LNCS 469, Springer-Verlag, 1990
- [Gla/Va] R. J. van Glabbeek, F. W. Vaandrager
 „Petri Net Models for Algebraic Theories of Concurrency“
 LNCS 259, Springer-Verlag, 1987
- [Gla/Wei] R. J. van Glabbeek, W. P. Weijland
 „Refinement in Branching Time Semantics“
 Technical Report CS-R8922 Amsterdam, 1989
- [Grabowski] J. Grabowski
 „On Partial Languages“
 Fundamenta Informaticae IV/2, 1981
- [Hoare] C. A. R. Hoare
 „Communicating Sequential Processes“
 Prentice Hall, 1985
- [Milner a] R. Milner
 „A Calculus of Communicating Systems“
 LNCS 92, Springer-Verlag, 1980
- [Milner] R. Milner
 „Communication and Concurrency“
 Prentice Hall, 1989
- [Ol/Ho] E. - R. Olderog, C. A. R. Hoare
 „Specification-Orientated Semantics for Communicating Processes“
 Acta Informatica 23, 1986
- [Park] D. Park
 „Concurrency and Automata on Infinite Sequences“
 LNCS 104, Springer-Verlag, 1981
- [Pomello] L. Pomello
 „Some Equivalence Notions for Concurrent Systems. An Overview“
 in:
 „Advances in Petri Nets 1985“
 LNCS 222, Springer-Verlag, 1986
- [Pratt] V. Pratt
 „Modelling Concurrency with Partial Orders“
 Int. J. Parallel Prog. 15, 1986

- [Taubner] D. Taubner
„Finite Representations of CCS and TCSP Programs
by Automata and Petri Nets“
LNCS 369, Springer-Verlag, 1989
- [Tr/Ra/Hi] B. A. Trakhtenbrot, A. Rabinovich, J. Hirshfeld
Technical Report 97/88, Tel Aviv University, 1988
und in:
„Behavior Structures and Nets“
Fundamenta Informaticae XI/4, 1988
- [Vogler] „Bisimulation and Action Refinement“
SFB-Bericht Nr. 342/10/90 A, 1990

Index

- Aktion
 - intern, unsichtbar 5
 - sichtbar 5
- Baum 41, 103
- Beobachtungskongruenz 11
- Bisimulation
 - divergente 18
 - history preserving 61, 66
 - interleaving 56, 65
 - partial word 58, 65
 - pomset 60, 62
 - schwache 10, 11
 - schwache history preserving 94
 - schwache history preserving pomset 97
 - starke 9
 - step 56, 57, 65
- Divergenz
 - divergent 7
 - divergenz-äquivalent 17
 - Divergenzen 17
 - divergenzfrei 7
- Eigenkonkurrenz 94
- Einschränkung 49
- endlich 7, 49
 - endlich verzweigend 7
 - endliche Ursachen 50
- Ereignis 48, 50
 - maximal 52
 - sichtbar 51
- Ereignisstruktur 48
 - prime 50
- Failures
 - divergente 27, 28
 - interleaving 86
 - partial word 89
 - pomset 90, 91
 - schwache 26, 27
 - stabile 25
 - starke 23
 - step 87
- Flußrelation 48
- History Preserving
 - bisimilar 61, 66
 - schwach bisimilar 94
 - schwach pomset bisimilar 97
 - ST-bisimilar 80, 82
- Homomorphismus 52
 - Pomsets 55
- Interleaving
 - bisimilar 56, 65
 - failure-äquivalent 86
 - ST-bisimilar 73, 82
 - trace-äquivalent 67
- Isomorphismus 8, 52
- Kausalrelation 50
- Konfiguration 49
 - ST-Konfiguration 73
- Konflikte
 - konfliktfrei 49
 - Konfliktrelation 48, 50
 - Konfliktvererbung 50
- Konkurrenzrelation 51
- linksabgeschlossen 49, 50
- markierungserhaltend 52
- Markierungsfunktion 48, 50
- Partial Word
 - bisimilar 58, 65
 - failure-äquivalent 89
 - ST-bisimilar 76
 - trace-äquivalent 69
- Pfad 7, 8
- Pomset 54, 104
 - bisimilar 60, 62
 - failure-äquivalent 90, 91
 - ST-bisimilar 77
 - trace-äquivalent 70
- schwächer sequentiell 52, 55
- Simulation
 - schwache 37
 - starke 37
- ST-Bisimulation
 - history preserving 80, 82
 - interleaving 73, 82
 - partial word 76
 - pomset 77
- Step 53
 - bisimilar 56, 57, 65
 - failure-äquivalent 87
 - trace-äquivalent 68
- Testäquivalenz
 - divergente 34
 - stabile 35
- Traces
 - divergente 17
 - interleaving 67, 104
 - partial word 69
 - pomset 70
 - schwache 16
 - starke 15
 - step 68, 104
- Transition 6, 53
- Transitionssystem 6, 103
- Übergangsrelation 6
- Voraussetzung
 - direkte 49
 - notwendige 51
- Zustand 6
 - divergent 7
 - stabil 7
 - Startzustand 6